

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Katedra mechaniky

Nelineární ohyb a ztráta stability tvaru důlní ocelové výztuže

The Non-linear Bending and Buckling of the Mine Steel Support

Student:

Bc. Šárka Michenková

Vedoucí diplomové práce:

doc. Ing. Jiří Podešva, Ph.D.

Ostrava 2013

Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Šárka Michenková**
Studijní program: N2301 Strojní inženýrství
Studijní obor: 3901T003 Aplikovaná mechanika
Téma: **Nelineární ohyb a ztráta stability tvaru důlní ocelové výztuže**
The Non-linear Bending and Buckling of the Mine Steel Support

Zásady pro vypracování:

1. Důlní ocelová výztuž, její užití.
2. Lineární ztráta stability tvaru přímého prutu a obloukové výztuže.
3. 3D modelování obloukové výztuže, nelinearity.
4. Ohybová charakteristika. Vyjádření náhradní ohybové tuhosti.
5. Vyhodnocení a závěr.

Seznam doporučené odborné literatury:

Juliš K., Tepřík O., Slavík A. : Statika. SNTL / Alfa, Praha 1987.
Chobot K., Benda J., Hájek V., Novotná H. : Statika stavebních konstrukcí II., Praha, SNTL/ALFA, 1983.
Hoschl C. : Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL / Alfa, Praha, 1971.
Kolář V., Němec I., Kanický V. : FEM Principy a praxe metody konečných prvků. Computer Press, 1997.
Kolář V., Kratochvíl J., Leitner F., Ženíšek A. : Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků. SNTL, Praha 1979.
Crisfield M. A. - Non-linear finite element analysis of solids and structures. John Wiley & Sons Ltd, Baffins Lane, Chichester, 1997.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **doc. Ing. Jiří Podešva, Ph.D.**

Datum zadání: 14.12.2012

Datum odevzdání: 20.05.2013



doc. Ing. Jiří Podešva, Ph.D.
vedoucí katedry



doc. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.
děkan fakulty

Místopřísežné prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci včetně příloh vypracovala samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a uvedla jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě

.....

podpis studenta

Prohlašuji, že

- jsem byla seznámena s tím, že na moji diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména §35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- беру на ве́домі́, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě diplomovou práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že diplomová práce bude v elektronické podobě uložena v Ústřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové práce. Souhlasím s tím, že údaje o kvalifikační práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- было́ сже́днано, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít toto dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- было́ сже́днано, že užít své dílo – diplomovou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- беру на ве́домі́, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě

.....

podpis

Bc. Šárka Michenková

Na Zadkách 84/16

739 32 Vratimov

Poděkování

Ráda bych touto cestou vyjádřila poděkování doc. Ing. Jiřímu Podešvovi, Ph.D. za jeho cenné rady, připomínky a trpělivost při vedení mé diplomové práce.

ANOTACE DIPLOMOVÉ PRÁCE

MICHENKOVÁ, Š. *Nelineární ohyb a ztráta stability tvaru důlní ocelové výztuže: diplomová práce*. Ostrava : VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra mechaniky, 2013, 57 s. Vedoucí práce: Podešva, J.

Diplomová práce se zabývá vyšetřováním nelineárního ohybu důlní ocelové výztuže až po ztrátu stability tvaru důsledkem plastických deformací a změny profilu.

Na začátku práce je popsáno užití důlní ocelové výztuže a charakterizována lineární teorie ztráty stability přímého prutu. V další části práce je popisována ohybová charakteristika a náhradní ohybová tuhost pro dokonale vetknutý nosník, který je namáhán čistým ohybem, kombinací ohybu s normálovou tlakovou sílou a kombinací ohybu s krouticím momentem. Další část se zabývá 3D modelováním „konečnoprvkového“ modelu v prostředí software Ansys Workbench. Výsledná řešení a z nich nabyté poznatky jsou uvedeny v poslední části, která se zabývá i jejich vzájemným srovnáním.

ANNOTATION OF MASTER THESIS

MICHENKOVÁ, Š. *The Non-linear Bending and Buckling of the Mine Steel Support: Master Thesis*. Ostrava : VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics, 2013, 57 p. Thesis head: Podešva, J.

This thesis deals with the investigation of the nonlinear bending of the mine steel support to loss of stability due to plastic deformation of the shape and profile changes.

At the beginning of the work is described usage of the mine steel support and characterized by the linear theory of the straight bar stability loss. In the next section is described bending characteristics and substitutive bending stiffness for fixed beam, subjected to pure bending, combined bending with axial compressive force and bending combined with torque. Another part deals with 3D "finite element" modeling in software Ansys Workbench. The solutions from these employ acquired skills are presented in the last part, which deals with their mutual comparison.

OBSAH

Seznam použitých značek a symbolů	8
1 Úvod.....	10
2 Důlní ocelová výztuž, její užití.....	12
3 Lineární ztráta stability tvaru přímého prutu	15
3.1 Eulerovo řešení stability přímého prutu – vzpěr přímých prutů	16
4 Ohybová charakteristika nosníku a náhradní ohybová tuhost	19
4.1 Vliv normálové síly.....	20
4.1.1 Analytické řešení	21
4.2 Vliv krouticího momentu	25
5 3D modelování metodou konečných prvků	26
5.1 Materiálové vlastnosti	27
5.2 Trojrozměrný model pro výpočet MKP.....	30
5.2.1 Modely délky 1 metr a 1,5 metru pro čistý ohyb.....	31
5.2.2 Model pro výpočet vlivu kroucení.....	32
5.3 Okrajové podmínky.....	33
6 Výsledky	35
6.1 Ohyb nahoru.....	35
6.1.1 Ohyb nahoru – výztuž o délce 1 m	37
6.1.2 Ohyb nahoru – výztuž o délce 1,5 m	40
6.1.3 Srovnání náhradní ohybové tuhosti $E \cdot J$ všech délek u ohybu nahoru	41
6.2 Ohyb dolů.....	43
6.2.1 Srovnání náhradní ohybové tuhosti $E \cdot J$ všech délek u ohybu dolů	46
6.3 Vliv normálové síly.....	47
6.4 Vliv krouticího momentu	49
7 Závěr	53
8 Seznam použité literatury	56

Seznam použitých značek a symbolů

E	[MPa]	modul pružnosti v tahu
F	[N]	síla
J	[m ⁴]	plošný moment setrvačnosti
J_{\min}	[m ⁴]	menší hlavní centrální moment setrvačnosti z průřezu
J_z	[m ⁴]	kvadratický moment průřezu k neutrálné ose
l	[m]	délka nosníku
Δl	[mm]	prodloužení
l	[mm]	konečná délka
l_0	[mm]	původní délka
l_I	[mm]	okamžitá délka
L_{RED}	[m]	vzpěrná délka
M	[N·m]	ohybový moment
M_k	[N·m]	krouticí moment
M_o	[N·m]	celkový ohybový moment
N	[N]	normálová síla
N_{KR}	[N]	kritická síla
R	[m]	poloměr zakřivení nosníku
S_0	[mm ²]	původní průřez
S_1	[mm ²]	okamžitý průřez
z	[m]	část nosníku malé délky
Φ	[rad]	úhel natočení
σ	[MPa]	napětí
σ_{skut}	[MPa]	skutečné (logaritmické) napětí
ε	[-]	poměrná deformace
$\varepsilon_{\text{skut}}$	[-]	skutečná (logaritmická) deformace
ρ	[kg·m ⁻³]	hustota
μ	[-]	Poissonovo číslo
$\frac{1}{\rho}$	[mm ⁻¹]	křivost nosníku
$[k]$		matice tuhosti prvku
$[k_G]$		geometrická matice tuhosti prvku
$[K]$		matice tuhosti celého systému

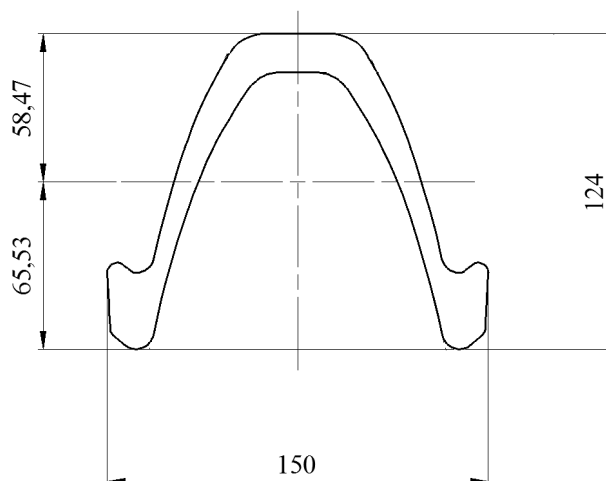
$[K_G]$	geometrická matice tuhosti celého systému
$\{N_0\}$	počáteční vektor zatížení
$\{N\}$	vektor zatížení
$\{N_{KR}\}$	vektor kritických sil
$\{R\}$	vektor zobecněných deformačních parametrů systému

Seznam použitých zkratek

ČSN	Česká státní Norma
HMH	Hypotéza Huber – von Mises – Hencky
MKP	Metoda konečných prvků

1 Úvod

Tato práce se zabývá analýzou náhradní ohybové tuhosti u důlní ocelové výztuže profilu TH 29 s oceli 31 Mn 4, která je namáhána čistým ohybem, ohybem kombinovaným normálovou silou, tlakovou a ohybem kombinovaným krouticím momentem.



Obr. 1.1 – Profil TH 29

Lineární teorie nosníků vychází z předpokladu platnosti Hookova zákona. Hookův zákon říká, že deformace je přímo úměrná napětí materiálu, za předpokladu malých sil a malých deformací. Napětí na ploše průřezu je rozloženo lineárně. Ohybová tuhost je v tomto případě vyjádřena součinem $E \cdot J$, kde E je modul pružnosti v tahu a J je plošný moment setrvačnosti průřezu.

Při ohybu důlní ocelové výztuže však neplatí jen lineární teorie nosníků, ve skutečnosti se oblouková výztuž při ohybu chová geometricky a materiálově nelineárně, a dochází ke změně profilu (změna momentu setrvačnosti). Základní druhy nelinearit:

- Geometrická nelinearita - velké deformace, velké posuvy a natočení, ztráta stability.
- Materiálová nelinearita - plasticita, creep, relaxace, viskoelasticita, aj.
- Vazbová (strukturální) nelinearita – vznik a zánik vazeb, kontaktní úlohy aj.

Pro navrhování a údržbu obloukové ocelové výztuže důlních děl je nezbytné operativně určovat její únosnost v nejrůznějších podmínkách. To vyžaduje opakované provádění pevnostních výpočtů a výpočtů deformace. V současnosti se podstatně rozšířili možnosti posuzování vlastností ocelových obloukových výztuží s využitím běžně

dostupné výpočetní techniky. Nákladné software, které využívají metodu konečných prvků, jsou v provozních podmínkách nedostupné.

Na katedře stavební mechaniky Fakulty stavební VŠB - Technické univerzity Ostrava byl zpracován software pomocí programovacího jazyka Visual Basic, který umožňuje určení únosnosti ocelové obloukové výztuže a přetvoření v prostředí Microsoft Excel. Výpočtový program využívá klasickou silovou metodu. Výpočty lze realizovat dle teorie I. a II. řádu. Program umožňuje zahrnout do modelu i geometrickou nelinearitu.

Obr. 1.2 – Výpočtový program v prostředí Microsoft Excel [15]

Tento program ovšem neumožňuje zahrnout pokles ohybové tuhosti, vlivem změny nosného profilu důlní ocelové výztuže, který vede až ke ztrátě stability tvaru a zároveň materiálovou nelinearitu. Proto se provádí výpočet náhradní ohybové tuhosti E-J, který umožňuje definovat charakteristiku chování materiálu až ke ztrátě stability tvaru. Tyto údaje jsou pak využity jako přímý vstup do výpočtového programu vytvořeného na katedře stavební mechaniky.

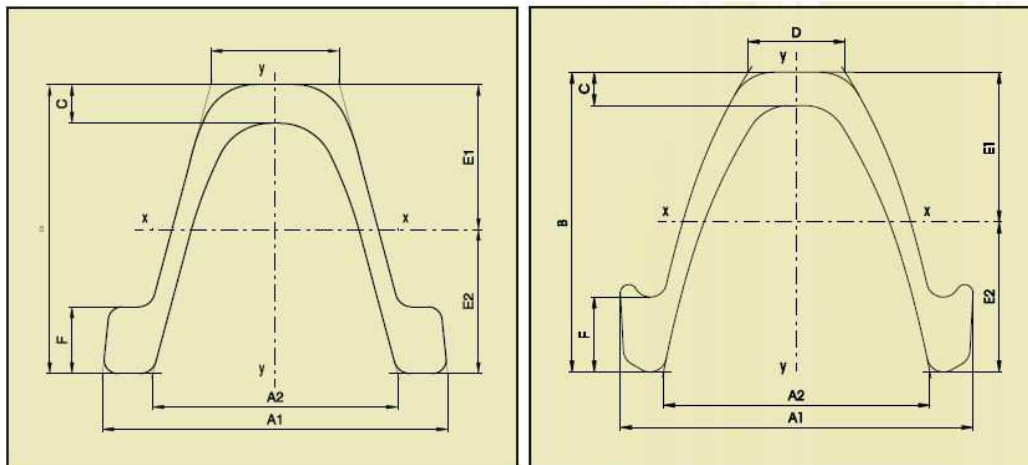
2 Důlní ocelová výztuž, její užití

Důlní ocelová výztuž, jinak řečeno „hajcman“, se dnes používá převážně při zakládání dlouhých, prostorových důlních děl uhelných a rudných šachet a při ražení tunelů a štol. Slouží především k zamezení pádu horniny, k zajištění důlních děl před jejich devastací, popřípadě k omezení nebezpečí při důlních otřesech. Hlavní výhodou důlní ocelové výztuže je schopnost přenášet zatížení ihned po instalaci. Další výhodou je značná tvarová variabilita a jednoduchá montáž. Výztuž je z větší části tvořena třemi a více kruhovými nebo rovnými díly, které se spojují třmenovými nebo šroubovými spoji. Důlní ocelové výztuže jsou vyrobeny z kvalitní oceli. Pro výrobu ocelových oblouků a spojek se používá ocel jakosti 11 500.0 dle ČSN 41 1500 a pro šlechtěné důlní oblouky se používá ocel 12 130, která je srovnatelná s materiálem 31 Mn 4 dle normy DIN 21544. Volba typu výztuže se řídí důlními podmínkami a účelem díla. Oblouky výztuží se před instalací v důlním díle upravují na příslušný rádius v dílnách technického zabezpečení podzemního díla [12].



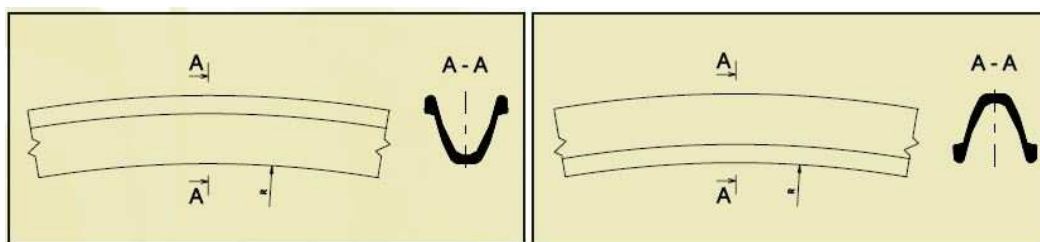
Obr. 2.1 – Důlní šachta vyztužená ocelovými výztužemi [11]

Nejpoužívanější důlní ocelové výztuže jsou především tzv. korýtkové profily ("K" profil), profil P 28 a profily typu Toussaint-Heintzmann ("TH" profil) viz Obr. 2.2. Za písmenem, které značí typ profilu, následuje číslice, která udává zaokrouhlenou hmotnost profilu v kg na 1 metr [10].



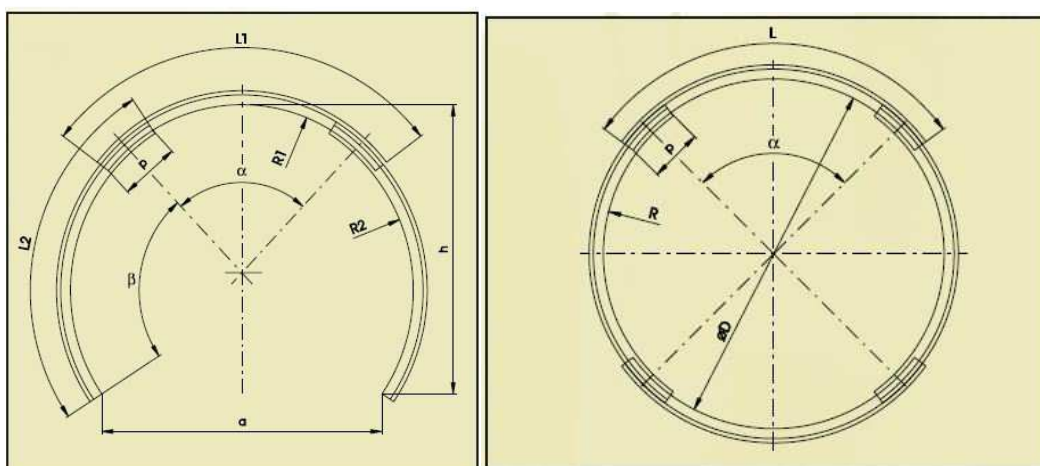
Obr. 2.2 – Nejčastěji používanější profil K (vlevo) a profil TH [10]

Důlní ocelové výztuže se dále dělí podle způsobu ohybu na normálně ohýbané výztuže a obráceně ohýbané výztuže viz Obr. 2.3.



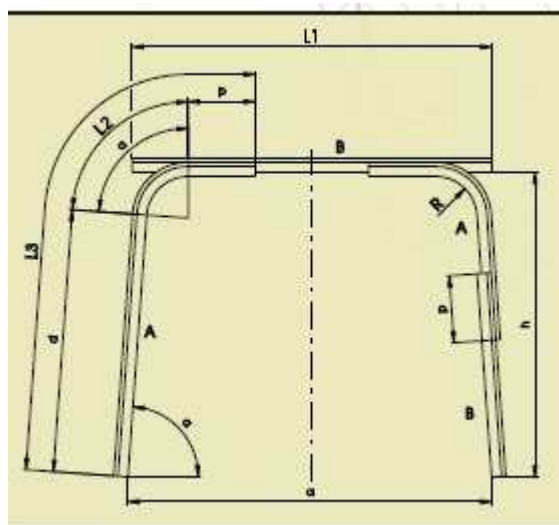
Obr. 2.3 – Normálně ohýbaná výztuž (vlevo) a obráceně ohýbaná výztuž [10]

Další dělení výztuží je provedeno podle světelného průřezu [10]. Pro výztuž důlních děl se používají především ocelové výztuže obloukové, kruhové a lichoběžníkové ocelové důlní výztuže. Obloukové a kruhové výztuže, viz Obr. 2.4 se vyrábí v standardních délkách od 1,8 m do 5,5 m s minimálním poloměrem zakřivení $R \geq 1000$ mm.



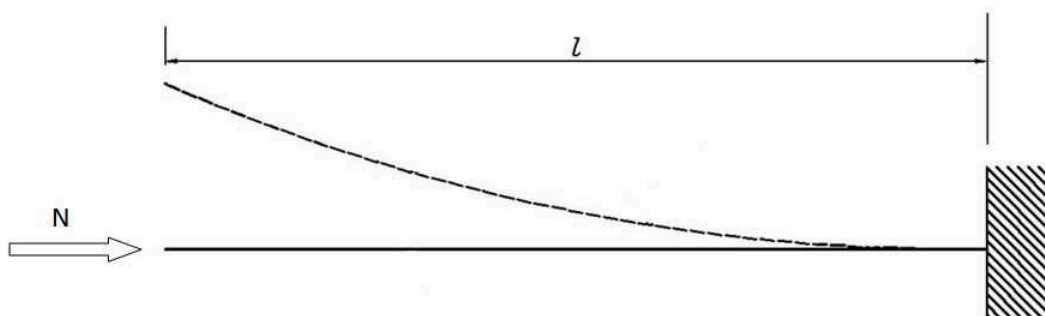
Obr. 2.4 – Oblouková poddajná výztuž – 3 dílná RK (vlevo) a kruhová důlní výztuž – 4 dílná [10]

Lichoběžníkové ocelové výztuže se vyrábí ve standardních délkách od 0,7 m a jsou určeny jen pro normální ohyb, viz Obr. 2.5. Mimo tyto výztuže jsou vyráběny i rovné profily a TH profily s otvory pro možnost kotvení.



Obr. 2.5 – Lichoběžníková poddajná výztuž [10]

3 Lineární ztráta stability tvaru přímého prutu



Obr. 3.1 – Zatížení přímého prutu osovou silou N

U přímého prutu zatíženého osovou silou N , která způsobuje tlakové namáhání, dochází ke snížení výsledné ohybové tuhosti. Výsledná tuhost prvku je dána vztahem $[[k]+[k_G]]$, kde $[k_G]$ je tzv. matice geometrické tuhosti neboli „matice tuhosti vyvolána počátečním předpětím“. Matice geometrických tuhostí $[k_G]$ je závislá na vektoru zatížení $\{N\}$. Součinem konstanty λ a počátečního vektoru zatížení $\{N_0\}$ můžeme popsat každé zvýšení zatížení osové síly N , tj. $\{N\} = \lambda \cdot \{N_0\}$. Vypočítáme-li $[k_G]$ pro $\{N_0\}$ je možné její konkrétní velikost též určit součinem $\lambda \cdot [k_G]$.

Vytvoříme-li z jednotlivých matic tuhosti prvků $[k]$ matici tuhosti celého systému $[K]$ a shodným způsobem vytvoříme matici geometrických tuhostí celého systému $[K_G]$, můžeme zapsat upravenou základní statickou rovnici metody konečných prvků (MKP) ve tvaru

$$[[K] - \lambda \cdot [K_G]] \cdot \{R\} = \lambda \cdot \{N_0\} \quad (3.1)$$

kde $\{R\}$ je vektor zobecněných deformačních parametrů systému a určí se z rovnice

$$\{R\} = [[K] - \lambda \cdot [K_G]]^{-1} \cdot \lambda \cdot \{N_0\} \quad (3.2)$$

Při zhroucení konstrukce musí být

$$\det[[K] - \lambda \cdot [K_G]] = 0 \quad (3.3)$$

Z rovnice (3.4) vypočítáme kritický součinitel λ a následně vektor kritických sil

$$\{N_{KR}\} = \lambda \cdot \{N_0\} \quad (3.4)$$

Rovnice (3.3) je vhodná k vyčíslení determinantu výhradně pro matice nízkých řádů a pro praktické úlohy se v podstatě nepoužívá. Následující rovnice připomínající maticovou rovnici pro výpočet vlastních frekvencí a tvarů netlumeného systému, je výchozí rovnicí pro stanovení kritického součinitele λ a taktéž i tvaru na mezi stability $\{R\}$.

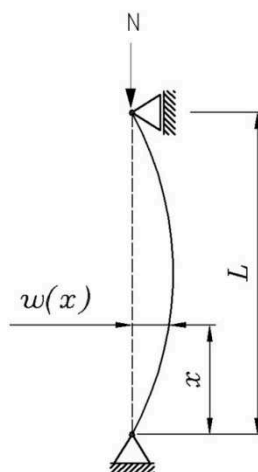
$$[[K] - \lambda \cdot [K_G]] \cdot \{R\} = 0 \quad (3.5)$$

Rovnice (3.5) se řeší známými metodami numerické matematiky například metodou iterace podprostoru aj. Tvar vektoru $\{R\}$ udává výhradně relativní poměr výchylek na mezi stability, obdobně jako vektor tvaru kmitání. Z praktického hlediska se zdá, že vyšší hodnoty kritických součinitelů λ_i a vektorů kritických sil $\{N_{KR}\}_i = \lambda_i \cdot \{N_0\}$ není důležité hledat, jelikož při větší hodnotě vektoru sil než $\{N_{KR}\}_1$, ztratila již konstrukce svůj stabilní tvar. Jsou-li však hodnoty např. λ_1 a λ_2 relativně blízko sebe (např. se liší o 10%), mohou počáteční imperfekce konstrukce být nakloněny druhému tvaru a ke ztrátě stability dojde právě pro druhý tvar [8]. V tomto případě jde ovšem již o jiný systém, než jak byl původně definován. Nicméně i toto je potřeba mít na mysli a počítat i vyšší hodnoty kritických součinitelů a jim odpovídajících tvarů $\{R\}$.

3.1 Eulerovo řešení stability přímého prutu – vzpěr přímých prutů

Jedna ze základních úloh stability je vzpěr přímých prutů.

Jako příklad je uvažován přímý, dostatečně štíhlý prut zatížený centrální tlakovou silou N . Tento prut je uložen na jedné straně pevnou kloubovou vazbou a na druhém konci posuvnou kloubovou vazbou viz Obr. 3.2. Tento případ oboustranně kloubově uloženého prutu se nazývá „druhý případ vzpěru“.



Obr. 3.2 – Oboustranně kloubově uložený přímý prut zatížený osovou silou N

Deformovaný prut v obecném místě x je namáhán ohybovým momentem

$$Mo(x) = -N \cdot w(x) \quad (3.6)$$

Přibližná diferenciální rovnice průhybové čáry (teorie II. řádu)

$$w''(x) = \frac{Mo(x)}{E \cdot J} = -\frac{N \cdot w(x)}{E \cdot J} \quad (3.7)$$

Po zavedení výrazu $\alpha^2 = \frac{N}{E \cdot J}$ přejde na tvar

$$w''(x) + \alpha^2 \cdot w(x) = 0 \quad (3.8)$$

Tato rovnice je známá jako homogenní diferenciální rovnice II. řádu. Rovnice (3.6) a (3.7) vyjadřují Eulerovo statické kritérium stability. Řešení a odvození Eulerova vzorce pro výpočet kritické síly pro druhý případ vzpěru je uveden v [8].

Eulerův vzorec pro výpočet kritické síly N_{KR} , pro druhý případ vzpěru je

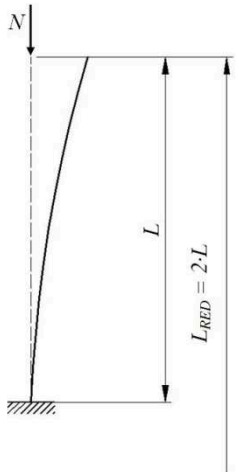
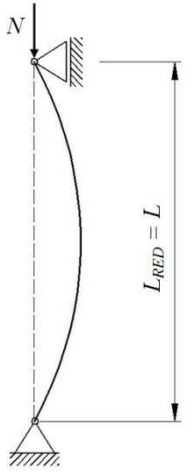
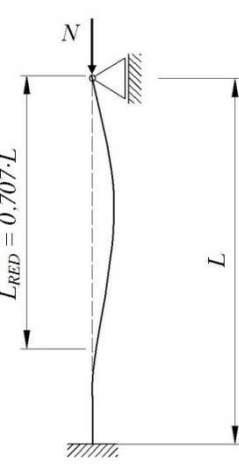
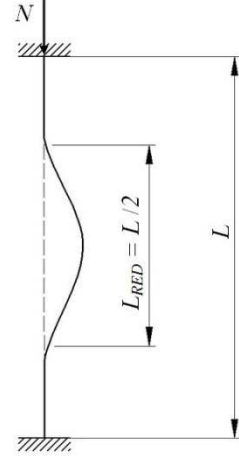
$$N_{KR} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{L_{RED}^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{L^2} \quad (3.9)$$

kde: E je modul pružnosti v tahu,
 J_{\min} je menší hlavní centrální moment setrvačnosti z průřezu a
 L_{RED} je vzpěrná délka, závisí na způsobu uložení.

V Tabulka 3.1 jsou uvedeny čtyři základní typy vzpěru přímého prutu, kritické délky prutu a Eulerovy vzorce pro výpočet kritické síly pro jednotlivé případy vzpěru. Odvození Eulerova vzorce pro všechny základní typy vzpěru je uvedeno v [8].

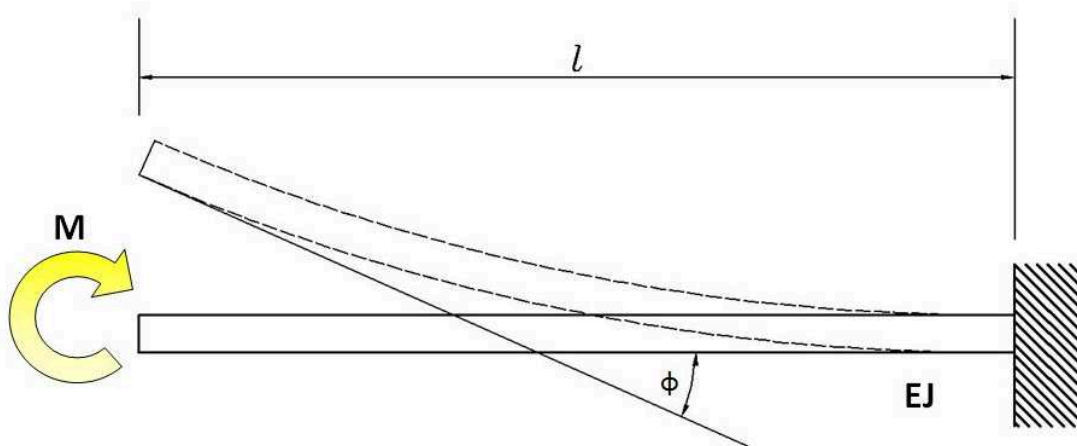
Ke ztrátě stability tvaru dochází krom namáhání osovým tlakem rovněž i při namáhání ohybem popřípadě při namáhání smykem. Ztráta stability může být způsobena několika vlivy např. změnou vnitřních statických účinků, vlivem deformace tělesa nebo vznikem plastických deformací aj. Prvky ohrožené ztrátou stability se vyznačují sníženou nosností.

Tabulka 3.1 – Čtyři základní případy Eulerova vzpěru přímých prutů

I. případ	II. případ	III. případ	IV. případ
			
$L_{RED} = 2 \cdot L$	$L_{RED} = L$	$L_{RED} = 0,707 \cdot L$	$L_{RED} = L / 2$
$N_{KR} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J \min}{L_{RED}^2}$			
$N_{KR} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J \min}{4 \cdot L^2}$	$N_{KR} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J \min}{L^2}$	$N_{KR} = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot J \min}{L^2}$	$N_{KR} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot J \min}{L^2}$

4 Ohybová charakteristika nosníku a náhradní ohybová tuhost

Pro analýzu náhradní ohybové tuhosti byl zvolen jednostranně vetknutý nosník, který je na volném konci zatížený ohybovým momentem. Průběh ohybového momentu je v tomto případě po celé délce nosníku konstantní.



Obr. 4.1 – Ohyb dokonale vetknutého nosníku

Úhel natočení volného konce u jednostranně vetknutého nosníku je dán vztahem:

$$\phi = \frac{M \cdot l}{E \cdot J} \quad (4.1)$$

kde: E je modul pružnosti v tahu,
J je plošný moment setrvačnosti,
M je ohybový moment a
l je délka nosníku.

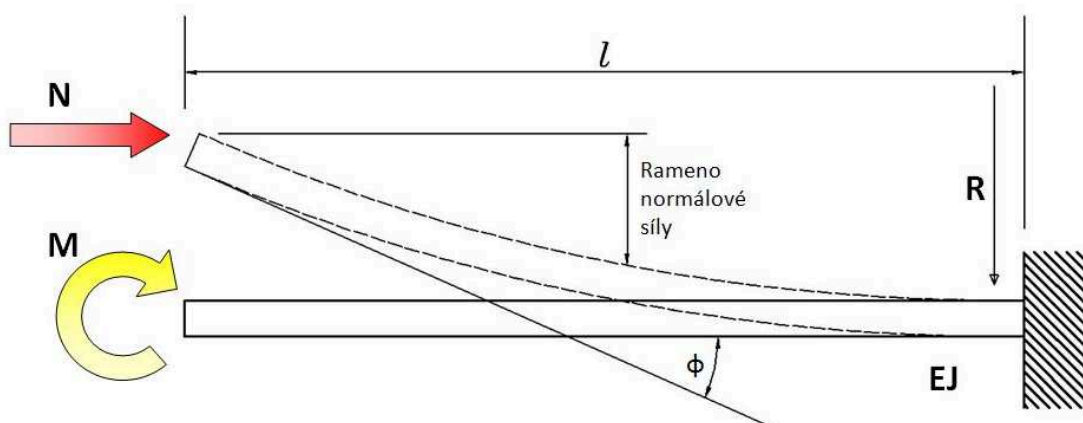
Ze vztahu (4.1) lze vyjádřit vztah pro ohybovou tuhost:

$$E \cdot J = \frac{M \cdot l}{\phi} \quad (4.2)$$

Aby proběhla konvergence řešení i po překonání vrcholu charakteristiky, kdy již dochází k jejímu měknutí, není do výpočtů zadáván přímo ohybový moment, ale úhel natočení volného konce nosníku. Ohybový moment je následně zjištěn jako reakce v místě vetknutí. Výstupem výpočtu je ohybový moment M a jemu odpovídající postupně narůstající úhel ohnutí nosníku ϕ .

4.1 Vliv normálové síly

Ohybový moment je ve skutečnosti kombinován normálovou silou, většinou tlakovou. Přítomnost normálové síly ovlivní tvar ohybové charakteristiky i závislost náhradní tuhosti na ohybovém momentu $E \cdot J = f_{(M)}$.



Obr. 4.2 – Ohyb při kombinaci působení momentu M a normálové síly N

Při průhybu vzniká rameno, na němž normálová síla vytváří moment. Výsledný ohybový moment M_o je větší než moment M a po délce nosníku se mění. Výsledný ohybový moment je dán součtem momentu M a momentem od normálové síly N . Vztah (4.1) pro konstantní ohybový moment po celé délce nosníku tedy neplatí. Z lineární teorie nosníků vyplývá:

$$E \cdot J = M_o \cdot R \quad (4.3)$$

kde: E je modul pružnosti v tahu,
 J je plošný moment setrvačnosti,
 M_o je celkový ohybový moment a
 R je poloměr zakřivení nosníku.

Vyjmeme-li z modelu část nosníku malé délky z , na němž pokládáme průběh ohybového momentu za konstantní, a vyšetříme jeho deformaci (průhyb a natočení), pak poloměr zakřivení je:

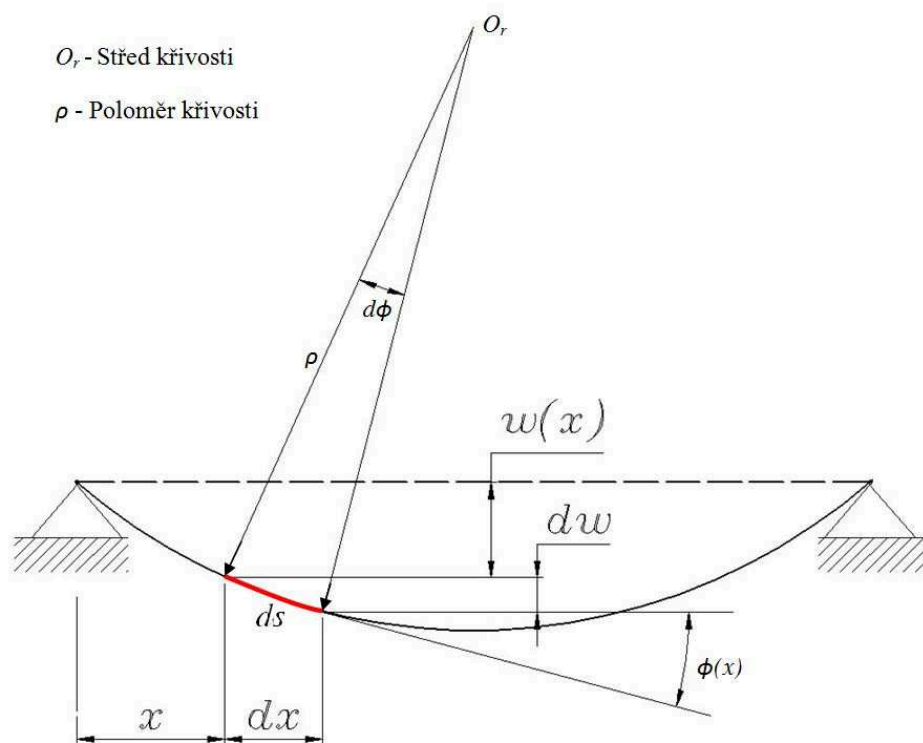
$$R = \frac{z}{\Phi} \quad (4.4)$$

Dosazením tohoto vztahu pro výpočet poloměru zakřivení do rovnice (4.3), dostaneme pak náhradní ohybovou tuhost pro nosník, kde působí ohybový moment a normálová síla.

$$E \cdot J = Mo \cdot \frac{z}{\Phi} \quad (4.5)$$

4.1.1 Analytické řešení

Pro odvození diferenciální rovnice průhybové čáry nosníku vyjdeme z Obr. 4.3.



Obr. 4.3 – Průhyb nosníku – střed křivosti

Platí

$$ds = \rho \cdot (-d\phi) \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\phi}{ds} \quad (4.7)$$

Rozdělení poměrné deformace v průřezu při ohybu

$$\varepsilon = \frac{Mo}{E \cdot J_z} \cdot y \quad (4.8)$$

Vztah pro poloměr křivosti (křivost) průhybové křivky nosníku

$$\frac{1}{\rho} = \frac{Mo}{E \cdot J_z} \quad (4.9)$$

kde: ρ je poloměr křivosti,
 Mo je celkový ohybový moment,
 E je modul pružnosti v tahu a
 J_z je kvadratický moment průřezu k neutrálné ose.

Dosaďme-li známý vztah vyjadřující křivost $\frac{1}{\rho}$ rovinné křivky $w(x)$ dostaneme diferenciální rovnici průhybové čáry

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{w''(x)}{\left[1 + (w'(x))^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (4.10)$$

Srovnáním vztahu pro křivost (4.9) s (4.10) pak

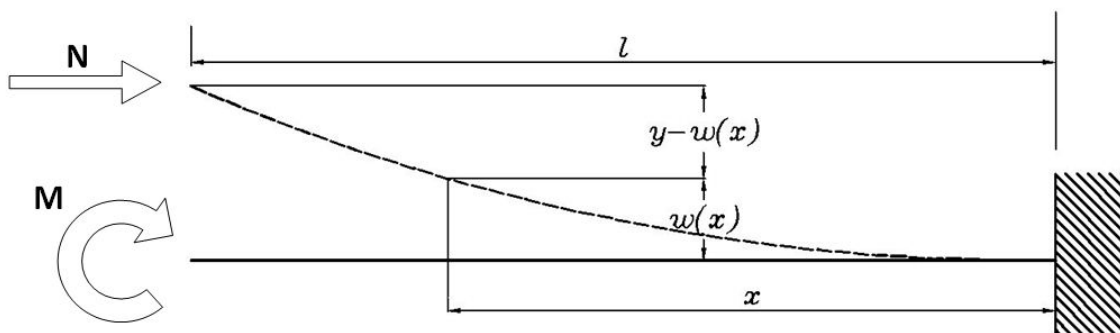
$$\frac{w''(x)}{\left[1 + (w'(x))^2\right]^{\frac{3}{2}}} = - \frac{Mo(x)}{E \cdot J_z} \quad (4.11)$$

Pro malé úhly natočení lze zanedbat člen $w'(x)$ a dostaneme zjednodušenou diferenciální rovnici průhybové čáry pro malé deformace nosníku

$$w''(x) = - \frac{Mo(x)}{E \cdot J_z} \quad (4.12)$$

První integrací diferenciální rovnice průhybové čáry (4.12) získáme úhel natočení

$$\phi(x) = w'(x) = - \int \frac{Mo(x)}{E \cdot J_z} dx + C_1 \quad (4.13)$$



Obr. 4.4 – Ohyb se současným působením normálové síly N

Výsledný ohybový moment $M_o(x)$ v místě x je dán součtem momentu M a momentem od normálové síly N na rameni $[y - w(x)]$, viz Obr. 4.4.

$$M_o = -M - N \cdot [y - w(x)] \quad (4.14)$$

Dosadíme-li výraz (4.14) do základní diferenciální rovnice průhybové čáry (4.12)

$$w''(x) = -\frac{M_o(x)}{E \cdot J_z}$$

stanovíme diferenciální rovnici průhybové čáry

$$w''(x) = -\frac{(-M - N \cdot [y - w(x)])}{E \cdot J_z} \quad (4.15)$$

$$w''(x) = \frac{M}{E \cdot J_z} + \frac{N}{E \cdot J_z} \cdot y - \frac{N}{E \cdot J_z} \cdot w'(x) \quad (4.16)$$

$$w''(x) + \frac{N}{E \cdot J_z} \cdot w'(x) = \frac{M}{E \cdot J_z} + \frac{N}{E \cdot J_z} \cdot y, \quad (4.17)$$

která po zavedení výrazu $\alpha^2 = \frac{N}{E \cdot J_z}$ přejde na tvar

$$r^2 + \alpha^2 = \alpha^2 \cdot \left(\frac{M}{N} + y \right) \quad (4.18)$$

Jejím homogenním řešením je

$$w(x)_0 = e^{0 \cdot x} \cdot (C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x)) \quad (4.19)$$

$$w(x)_0 = C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) \quad (4.20)$$

kde: C_1 a C_2 jsou neznámé veličiny.

Úplným řešením rovnice (4.18) je

$$w(x)_0 = C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + \frac{M}{N} + y \quad (4.21)$$

$$w'(x)_0 = C_1 \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha \cdot x) - C_2 \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha \cdot x) \quad (4.22)$$

Neznámé veličiny C_1 , C_2 , y určíme z okrajových podmínek. V tomto případě v místě vetknutí nosníku je průhyb nosníku nulový a v místě l je průhyb roven y . Další podmínkou je nulové natočení v místě vetknutí nosníku.

$$\begin{aligned} w(x=0) &= 0 \\ w(x=l) &= y \\ w'(x=0) &= \phi(x=0) \end{aligned}$$

Po dosazení těchto okrajových podmínek do (4.21) a (4.22) byly vyjádřené neznámé

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= -\frac{M}{N} - y \\ y &= \frac{M}{N} \cdot \left(-1 + \frac{1}{\cos(\alpha \cdot l)} \right) \end{aligned}$$

Dosazením do (4.21) dostaneme

$$\left(-\frac{M}{N} + \frac{M}{N} - \frac{M}{N \cdot \cos(\alpha \cdot l)} \right) \cdot \cos(\alpha \cdot x) + \frac{M}{N} + \frac{M}{N \cdot \cos(\alpha \cdot l)} - \frac{M}{N} = w(x) \quad (4.23)$$

Výsledkem je úplné řešení rovnice průhybové čáry

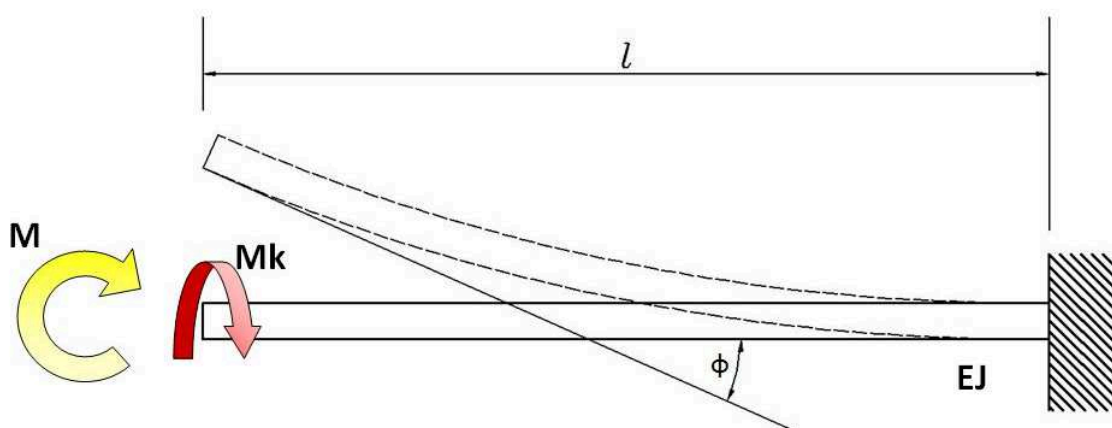
$$w(x) = \frac{M}{N} \cdot \left(\frac{1 - \cos(\alpha \cdot x)}{\cos(\alpha \cdot l)} \right) \quad (4.24)$$

Kde

$$\alpha = \sqrt{\frac{N}{E \cdot J_z}}$$

4.2 Vliv krouticího momentu

Dalším případem, který byl vyšetřován, je nosník, na který působí krouticí moment k podélné ose nosníku a zároveň je zatěžován ohybovým momentem. Přítomnost krouticího momentu ovlivní tvar ohybové charakteristiky i závislost náhradní ohybové tuhosti. Výsledky se zpracovávají stejně jako v případě, kde působí jen čistý ohybový moment. Výstupem výpočtu je tedy ohybový moment M_0 a jemu odpovídající postupně narůstající úhel ohnutí nosníku ϕ .

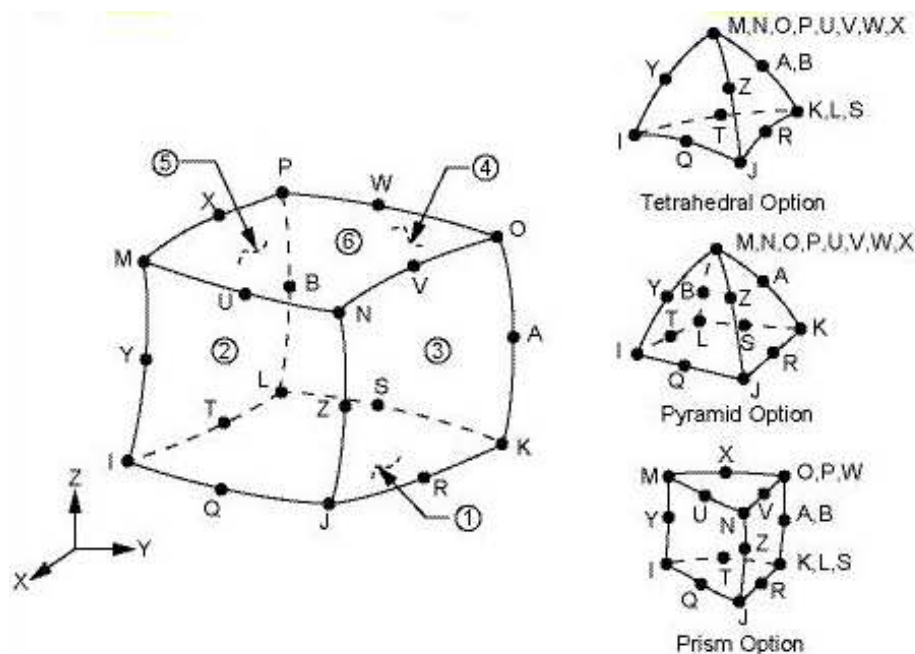


4.5 – Ohyb při kombinaci působení krouticího momentu M_k a momentu M

5 3D modelování metodou konečných prvků

Metoda konečných prvků (MKP) je v současné době nejčastěji používaná numerická metoda v mechanice. U této metody se těleso nahrazuje odpovídajícím konečným počtem prvků, jejichž počet závisí na požadované přesnosti, dostupné výpočetní technice, atd. Nelineární ohyb profilu důlní ocelové výztuže byl řešen v prostředí software Ansys Workbench, který je založen na deformační variantě metody konečných prvků. Deformační metoda zohledňuje geometrii tělesa, materiálové vlastnosti, okrajové podmínky i počáteční podmínky. Modelování pomocí MKP umožňuje do výpočtu zahrnout materiálovou nelinearitu i geometrickou nelinearitu (změnu profilu). Nelineární úlohy MKP byly řešeny pomocí iterační metody Newton – Raphson.

Trojrozměrný model byl vytvořen v prostředí software Ansys Workbench použitím „konečnoprvkových“ entit tzv. uzlů a prvků. Byl použit 3D prvek – SOLID 186. SOLID 186 je 20 uzlový 3D typ prvku vyššího řádu. Prvek je definován 20 uzly, které mají tři stupně volnosti – 3 posuvy ve směru x, y a z. Prvek umožňuje zahrnout do výpočtu plasticitu, hyperelasticitu, tečení, napět'ové tuhnutí a má velké deformační schopnosti.



Obr. 5.1 – SOLID 186 – 20 uzlový 3D prvek vyššího řádu [17]

5.1 Materiálové vlastnosti

Materiálové vlastnosti materiálu důlní ocelové výztuže, nutné pro provedení výpočtů, byly získány zkoušením materiálu pomocí tahové zkoušky. Tahová zkouška je základní a zároveň nejrozšířenější mechanická zkouška statická. Provádí se na tzv. trhacím stroji, který umožňuje zatěžování vzorku až do jeho destrukce (přetržení). Vzorek je při zkoušce podroben tahovému zatížení, jehož velikost s časem rovnoměrně roste. Zatěžování je uskutečněno plynule narůstající silou F . Trhací stroj během zkoušení sleduje chování materiálu a zaznamenává tzv. pracovní diagram udávající závislost tahového napětí σ na poměrné deformaci ε . Z pracovního diagramu se získá především mez pevnosti, mez kluzu a mez úměrnosti. Mez úměrnosti je maximální možné napětí, do kterého je závislost napětí na prodloužení přímo úměrná, platí zde Hookův zákon. Po překročení meze kluzu začne materiál plasticky téct, a po odlehčení zůstává v deformovaném stavu. Mez pevnosti je maximální hodnota napětí, při které materiál nevykazuje známky porušení.

Ve smluvním pracovním diagramu vystupuje tzv. smluvní napětí a poměrné prodloužení. Smluvní napětí je poměr síly F působící na plochu o průřezu S_0 nedeformovaného vzorku.

$$\sigma = \frac{F}{S_0} \quad (5.1)$$

Poměrné prodloužení se vypočítá jako poměr prodloužení vzorku Δl k původní délce l_0 .

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (5.2)$$

Ve skutečnosti je pracovní diagram idealizován, jelikož deformace se vztahuje k původní délce vzorku l_0 a smluvní napětí k původnímu průřezu S_0 . Hodnoty tohoto diagramu se nazývají inženýrská data. Rozdíl mezi původním průřezem a průřezem při přetržení bývá značný. Rozdíl průřezu nedeformovaného a deformovaného vzorku je nezanedbatelný již brzy po začátku tahové zkoušky tudíž použijeme vztahy pro tzv. logaritmickou (skutečnou) deformaci ε_{skut} a logaritmické (skutečné) napětí σ_{skut} .

$$\varepsilon_{skut} = \int_{l_0}^l d\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln l - \ln l_0 = \ln \frac{l}{l_0} \quad (5.3)$$

kde: $d\varepsilon$ je okamžitá deformace,
 l_1 je okamžitá délka,
 l_0 je původní délka a
 l je konečná délka.

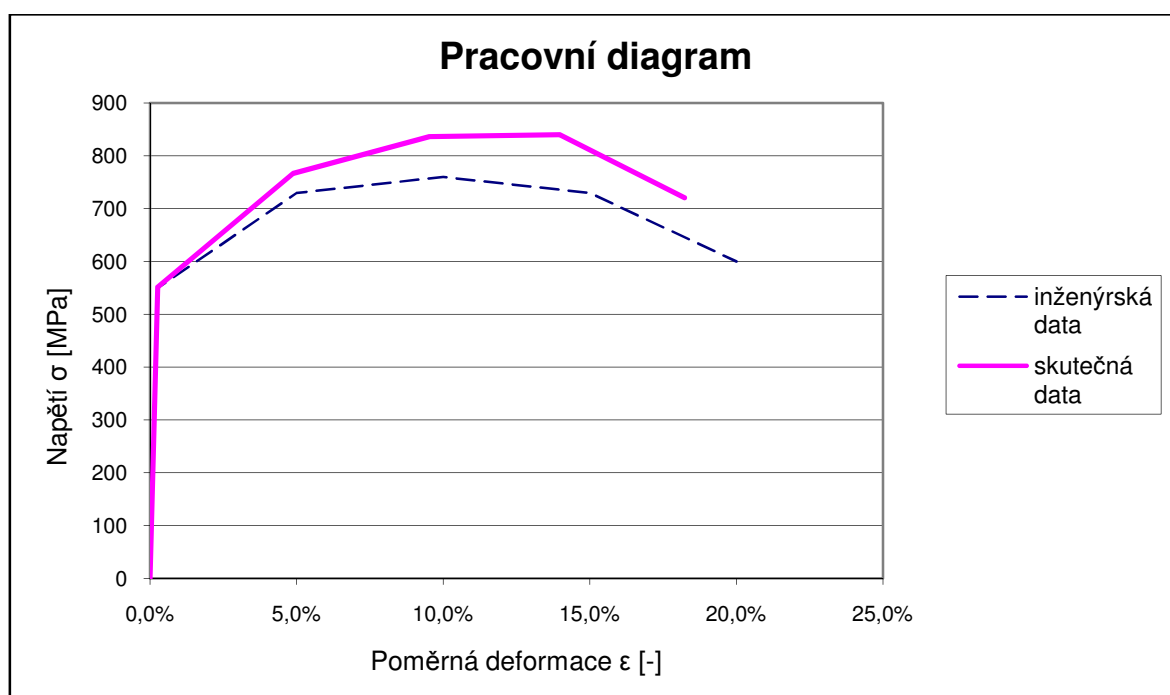
$$\sigma_{skut} = \frac{F}{S_1} \quad (5.4)$$

kde: S_1 je okamžitý průřez vzorku.

Skutečné data pro skutečný pracovní diagram lze přepočítat z inženýrských dat pomocí vztahů:

$$\varepsilon_{skut} = \ln(1 + \varepsilon) \quad (5.5)$$

$$\sigma_{skut} = \sigma \cdot (1 + \varepsilon) \quad (5.6)$$



Graf 5.1 – Pracovní diagram $\sigma - \varepsilon$

Nejprve byly u výpočtového modelu definovány základní materiálové vlastnosti pro lineární materiálový model, a to modul pružnosti v tahu E , poissonovo číslo μ a hustota materiálu ρ . Nelineární materiálové vlastnosti pro důlní ocelovou výztuž jsou v software Ansys Workbench definovány pomocí skutečných dat průběhu tahové křivky a typu

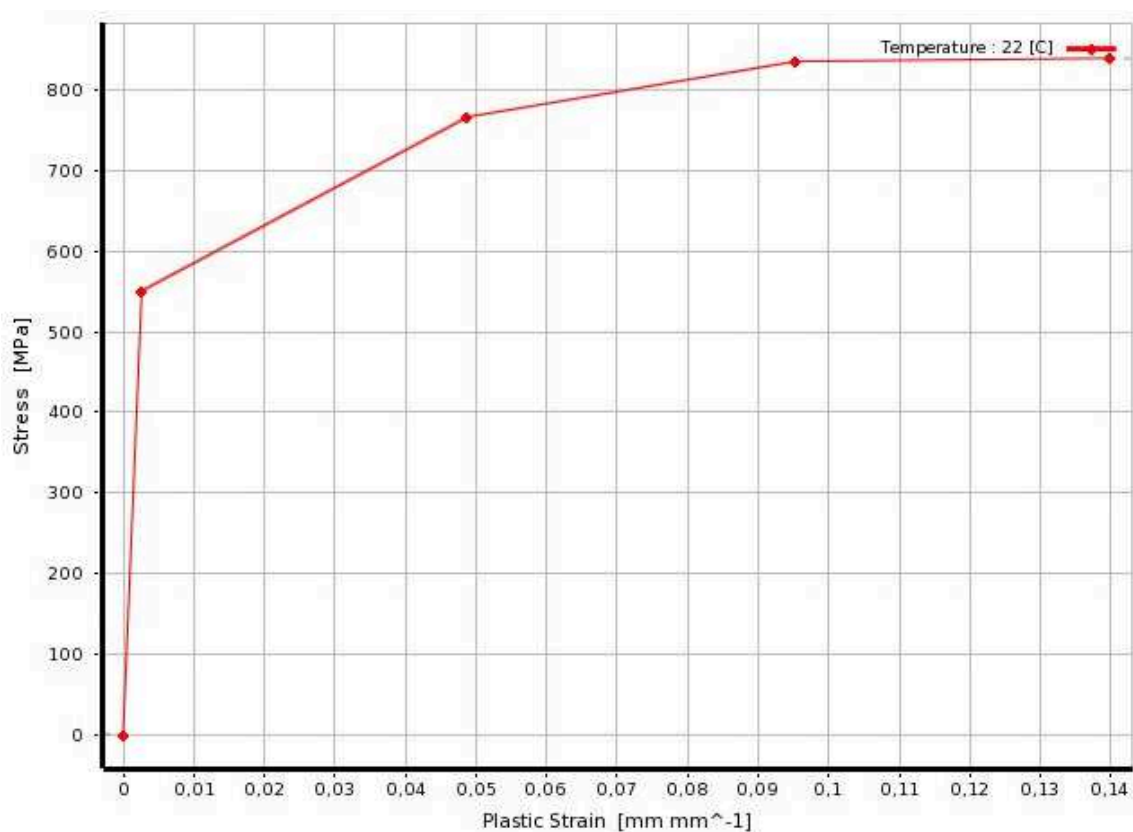
plasticity. Existují 3 typy křivky plasticity: nelineární, multilineární a bilineární. Pro řešení této úlohy byl zvolen multilineární model plasticity. Multilineární materiál byl zadán pomocí 5 bodů z tahové křivky, které odpovídají hodnotám pracovního diagramu $\sigma - \epsilon$.

Tabulka 5.1 – Základní materiálové vlastnosti

Modul pružnosti v tahu E [MPa]	210 000
Poissonovo číslo μ [-]	0,3
Hustota ρ [kg/m³]	7 850

Tabulka 5.2 – Jednotlivé body multilineárního modelu

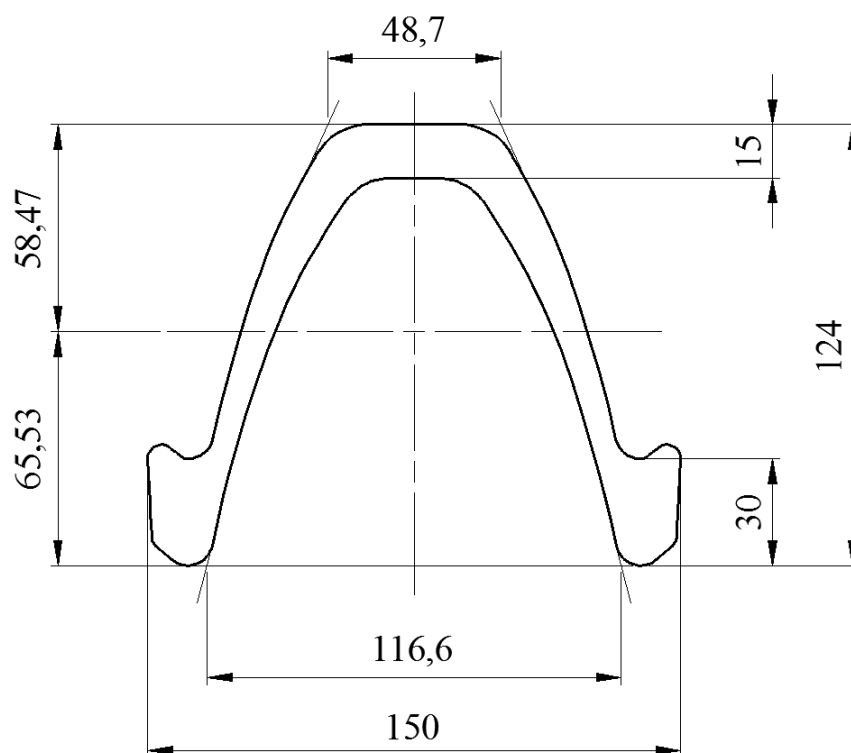
	Skutečná deformace ϵ [-]	Skutečné napětí σ [MPa]
1	0	0
2	0,00263	551
3	0,04880	767
4	0,09530	836
5	0,14000	840



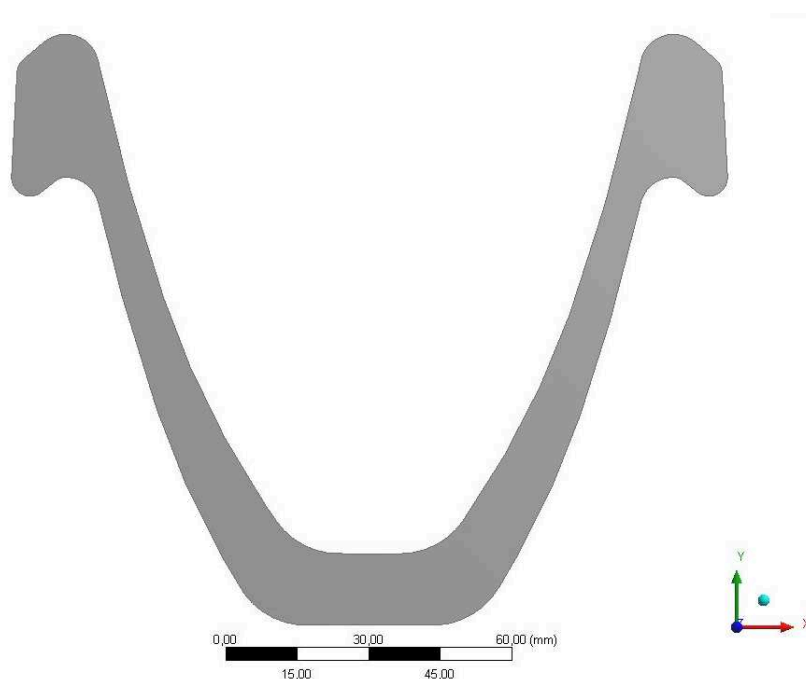
Obr. 5.2 – Multilineární model plasticity

5.2 Trojrozměrný model pro výpočet MKP

Výpočtový model byl tvořen v prostředí software Ansys Workbench. Nejprve byl vytvořen samostatný tvar profilu důlní ocelové výztuže TH 29.

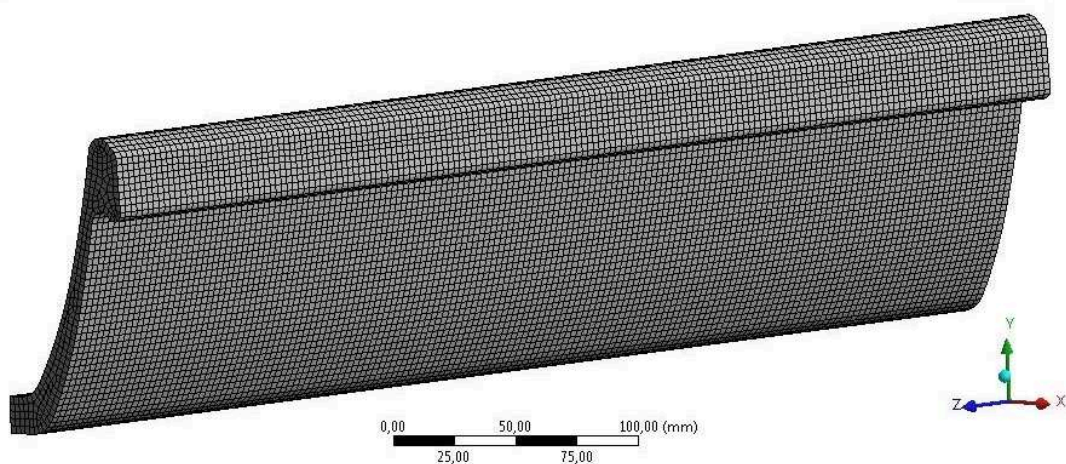


Obr. 5.3 – Rozměry profilu TH 29



Obr. 5.4 – Tvar profilu TH 29

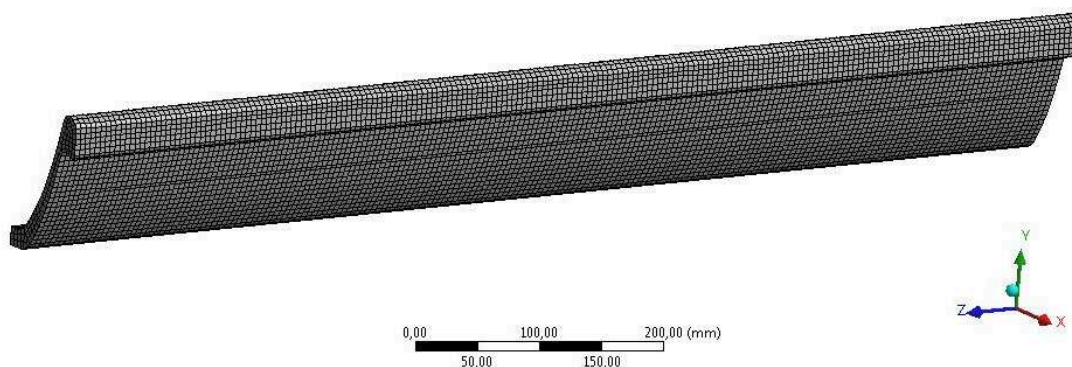
Profil se dále vymodeloval jako trojrozměrný model. Byla využita rovinná symetrie profilu, a proto byla vymodelována jen jedna polovina. Tento model má délku 0,5 metru a je tvořen 45 805 prvky a 201 745 uzly, viz Obr. 5.5.



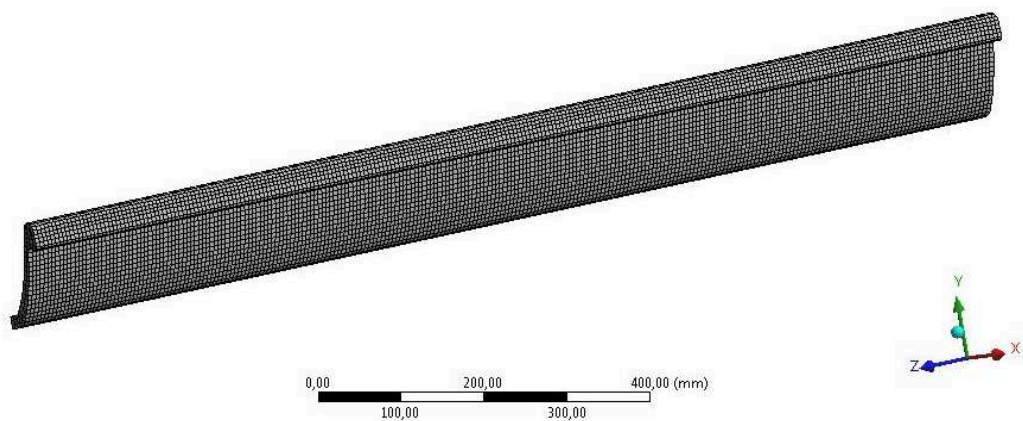
Obr. 5.5 – Konečnoprvkový trojrozměrný model o délce 0,5 m

5.2.1 Modely délky 1 metr a 1,5 metru pro čistý ohyb

Ohybová charakteristika a náhradní ohybová tuhost byla zjišťována pro případ, kde působí jen čistý ohyb i na dalších dvou modelech různých délek, a to modelech o délce 1 m a délce 1,5 m. Tyto modely slouží pro srovnání ohybové charakteristiky a náhradní ohybové tuhosti pro výztuže profilu TH 29 různých délek mezi sebou. U všech modelů je využita rovinná symetrie tvaru profilu. Konečnoprvkový poloviční model délky 1 m je tvořen 24 385 prvky a 106 693 uzly a model o délce 1,5 m je tvořen 18 903 prvky a 92 186 uzly.



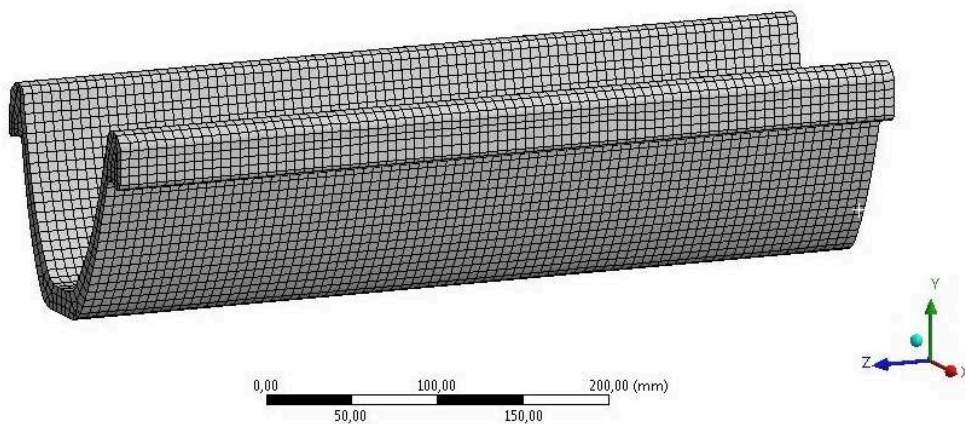
Obr. 5.6 – Konečnoprvkový trojrozměrný model o délce 1 m



Obr. 5.7 – Konečnoprvkový trojrozměrný model o délce 1,5 m

5.2.2 Model pro výpočet vlivu kroucení

Analýza vlivu kroucení na ohýbaný profil důlní ocelové výztuže byla prováděna na celém modelu, tudíž zde nebylo využito žádné symetrie tvaru profilu. Trojrozměrný model důlní ocelové výztuže byl vymodelován o délce 0,5 m. Model je tvořen 13 392 prvky a 62 909 uzly.

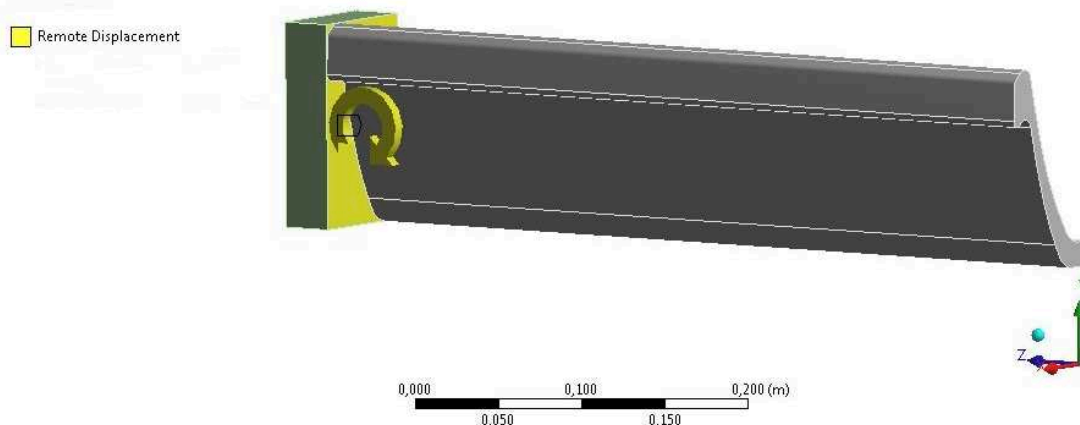


Obr. 5.8 – Konečnoprvkový model celého profilu o délce 0,5 m

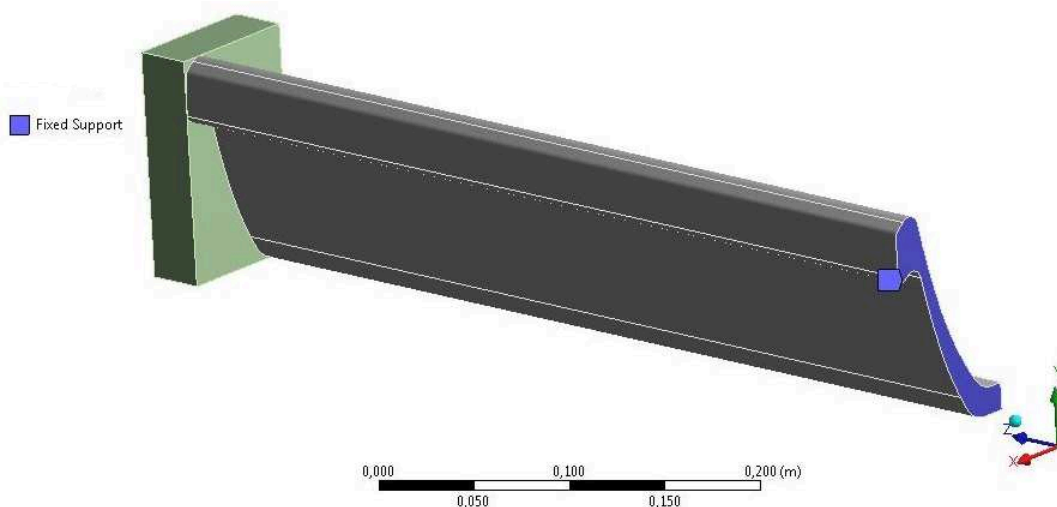
5.3 Okrajové podmínky

Do „konečnoprvkového“ modelu byla vymodelována na levé straně nosníku kostka velké tuhosti. Na tuto kostku je zadáván úhel ohnutí kolem osy X. Z důvodů konvergence řešení po překonání vrcholu charakteristiky, kdy dochází ke ztrátě stability tvaru (tzv. měknutí) není do výpočtu zadán ohybový moment, ale je zadán úhel natočení. Ten je orientován jako kladný úhel ohnutí kolem osy X pro ohyb dolů a záporný úhel ohnutí kolem osy X pro ohyb nahoru, viz Obr. 5.9. Úhel postupně s časem roste. Ohybový moment je pak zjišťován jako reakce v uložení (v místě vetknutí).

Na pravém konci nosníku byly odebrány všechny stupně volnosti, tzn. dokonalé vetknutí, viz Obr. 5.10.

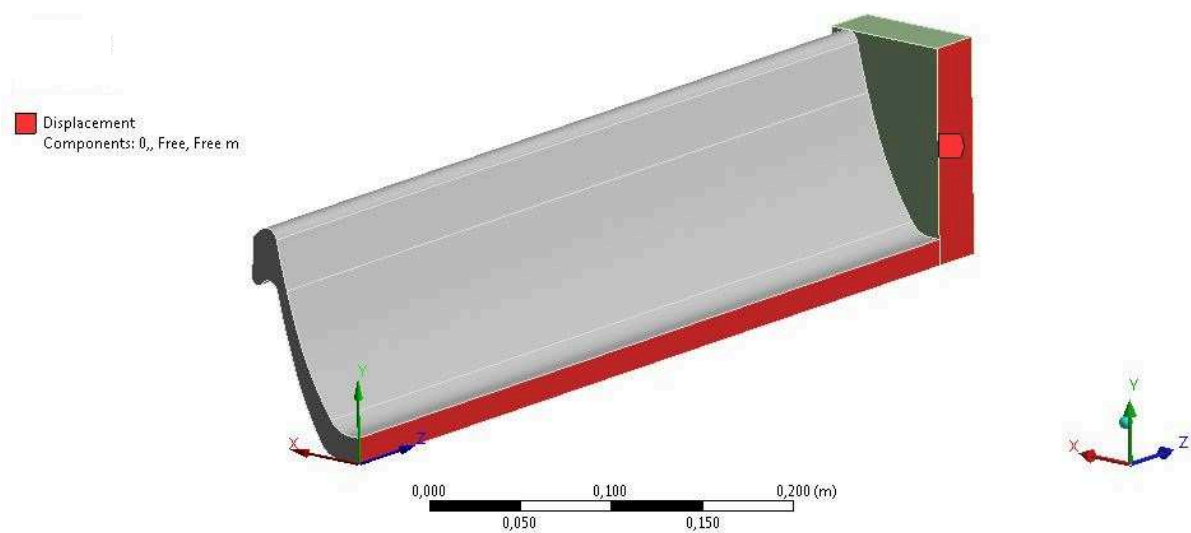


Obr. 5.9 – Okrajová podmínka: úhel ohnutí



Obr. 5.10 – Okrajová podmínka: vetknutí na pravém konci nosníku

Pro zajištění symetrické deformace profilu na polovičním modelu byl zamezen posuv v ose X. Tato okrajová podmínka byla zadána na nosník i kostku velké tuhosti.

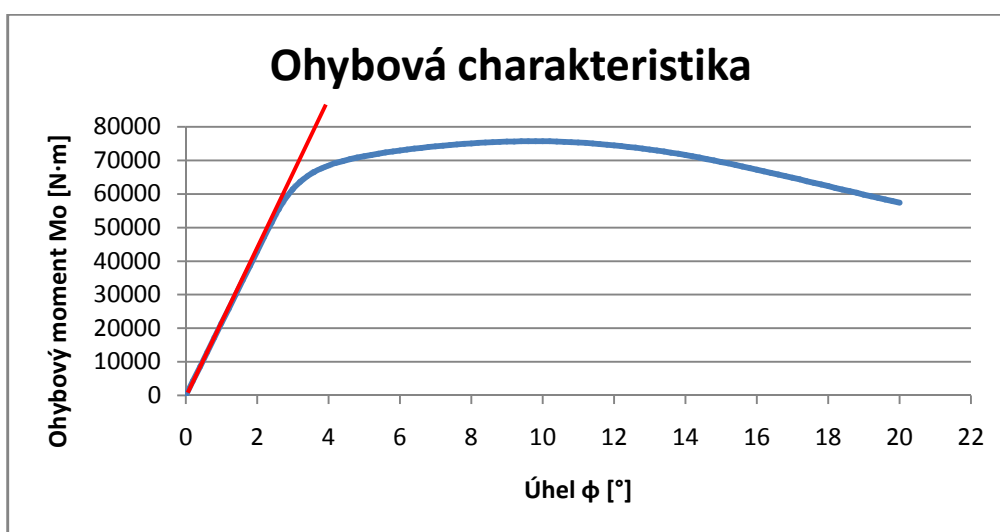


Obr. 5.11 – Okrajová podmínka: symetrie

6 Výsledky

6.1 Ohyb nahoru

Na volném konci jednostranně vetknutého nosníku je zadán úhel ohnutí směrem nahoru. Výsledný ohybový moment byl zjišťován jako reakce v místě vetknutí. Tento ohybový moment je po celém nosníku konstantní. Výstupem analýzy je narůstající úhel ohnutí ϕ a jemu odpovídající ohybový moment M_o , tato závislost se nazývá ohybová charakteristika.



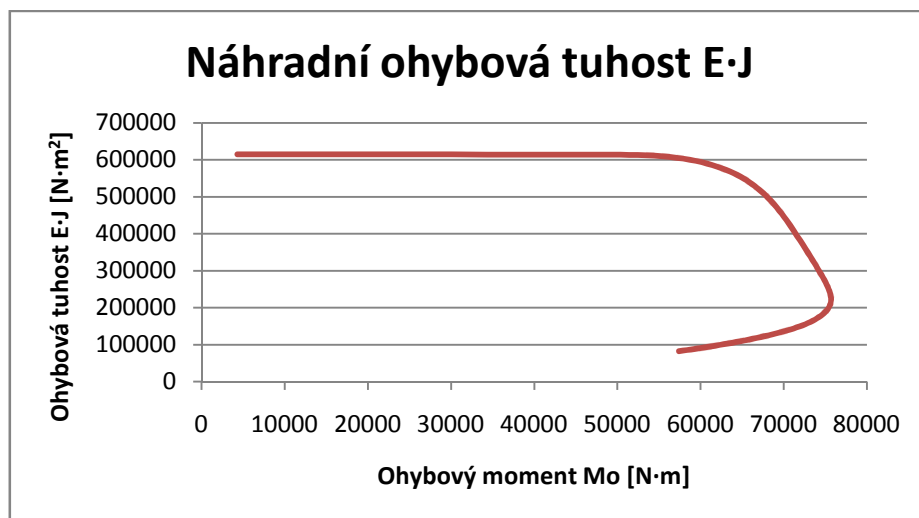
Graf 6.1 – Ohybová charakteristika nosníku o délce 0,5 m

Na začátku ohybové charakteristiky se nachází lineární úsek přibližně do úhlu ohnutí $2,4^\circ$ a odpovídajícímu momentu $51\,420\text{ N}\cdot\text{m}$. Tento úsek odpovídá lineární teorii nosníků. Dále začíná nárůst ohybového momentu zpomalovat vůči úhlu ohnutí, tzn., že dochází k zrychlenému ohybu v závislosti na momentu důsledkem vzniku plastických deformací a později i změnou profilu. K výraznému otvírání profilu dochází od úhlu ohnutí přibližně $9,8^\circ$ a odpovídajícímu momentu $75\,698\text{ N}\cdot\text{m}$. Od tohoto bodu dochází i k výraznému snižování ohybové tuhosti. Tento bod představuje ztrátu stability tvaru, což způsobuje následné zhroucení konstrukce. Profil totiž není schopen unést větší moment.

Tento rys nelinearity ohýbaného nosníku se projeví snížením ohybové tuhosti $E \cdot J$ v závislosti na ohybovém momentu. Z výrazu (4.2) lze vypočítat ohybovou tuhost pro odpovídající ohybový moment.

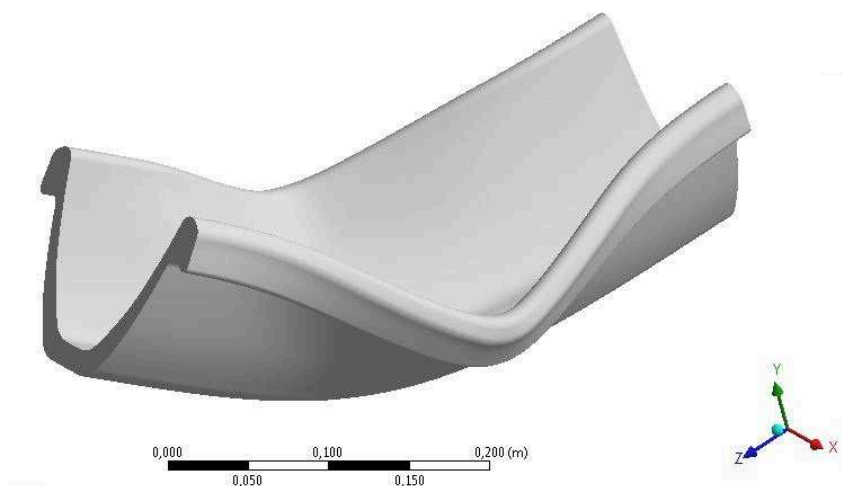
$$E \cdot J = \frac{M \cdot l}{\phi}$$

Závislost ohybové tuhosti $E \cdot J$ na ohybovém momentu M_o představuje náhradní ohybovou tuhost $E \cdot J$.

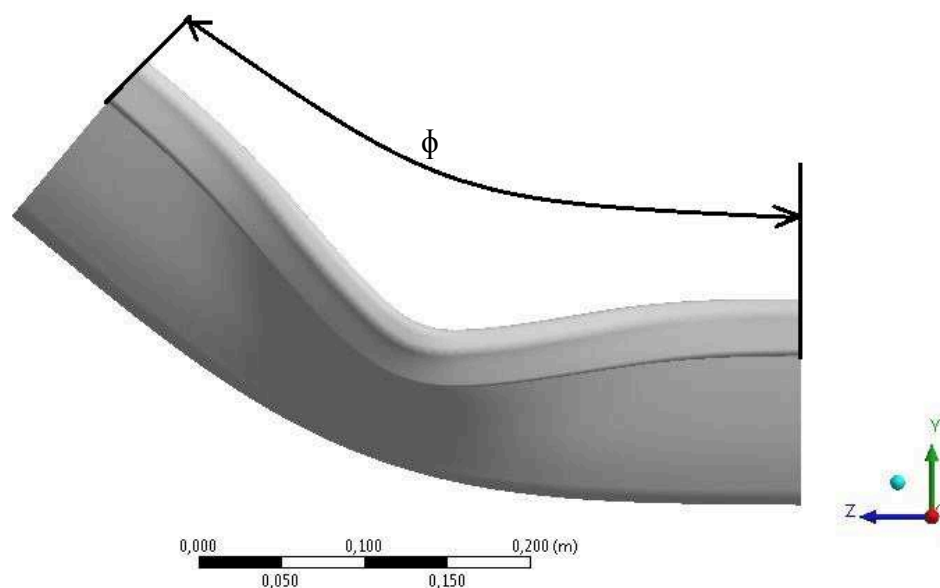


Graf 6.2 – Náhradní ohybová tuhost $E \cdot J$ pro nosník o délce 0,5 m

Z průběhu křivky náhradní ohybové tuhosti lze vypočítat, že náhradní ohybová tuhost je konstantní při zatěžování přibližně do 51 420 N·m. Hodnota této náhradní ohybové tuhosti $E \cdot J$ je cca 614 800 N·m². Tato část představuje lineární úsek (sklon červené přímky), který je na začátku ohybové charakteristiky, viz graf 6.1. Dále náhradní ohybová tuhost klesá vlivem výskytu plastických deformací a později i vlivem změny profilu (změna momentu setrvačnosti profilu). Bod s největším ohybovým momentem 75 698 N·m představuje bod ztráty stability tvaru. V tomto bodě je náhradní ohybová tuhost $E \cdot J$ cca 221 284 N·m². Tyto údaje jsou již přímým vstupem do výpočtového programu vyvinutého na katedře stavební mechaniky Fakulty stavební VŠB – Technické univerzity Ostrava, zmíněného v úvodu.

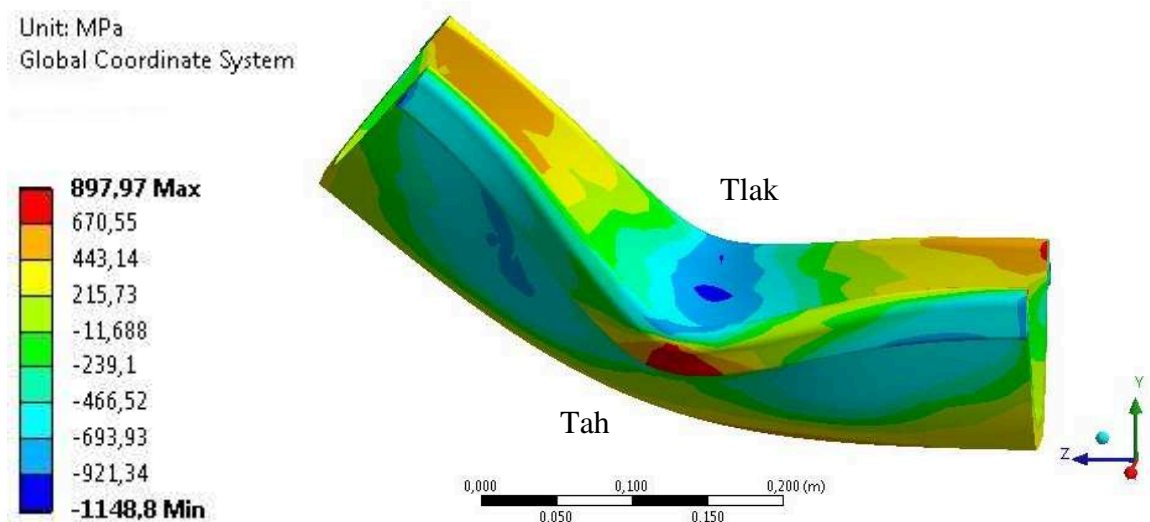


Obr. 6.1 – Ohyb nahoru - deformace nosníku



Obr. 6.2 – Úhel ohnutí – ohyb nahoru

Při ohybu je část průřezu profilu tažená a druhá část tlačena viz Obr. 6.3.

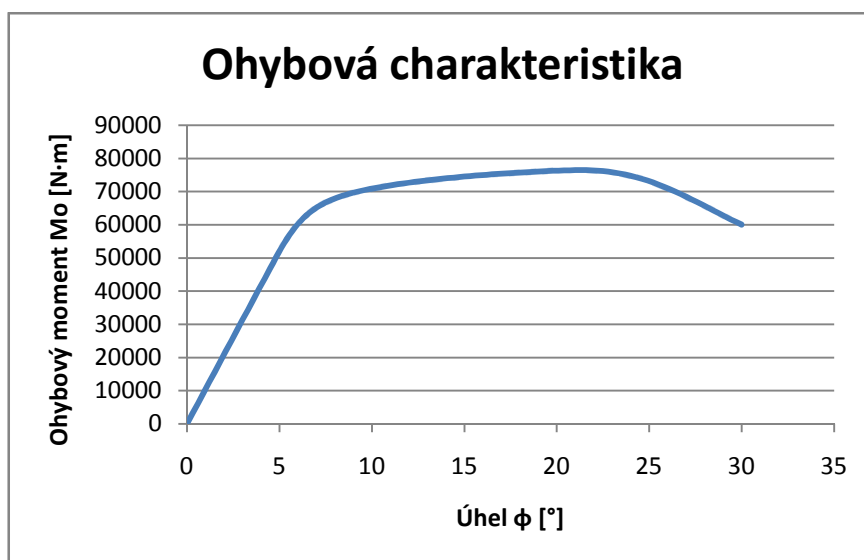


Obr. 6.3 – Rozložení normálového napětí u ohybu nahoru.

6.1.1 Ohyb nahoru – výztuž o délce 1 m

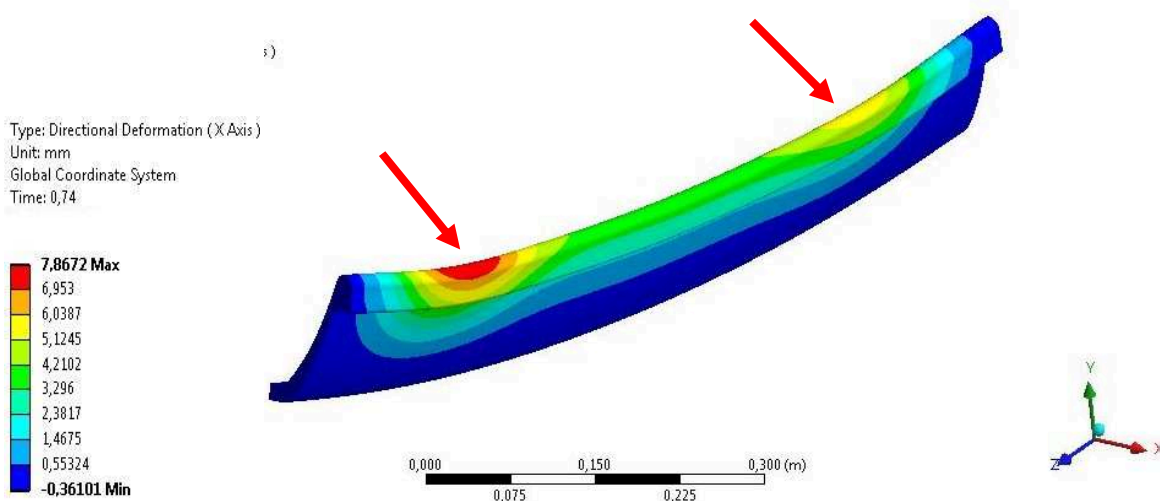
U výztuže o délce 1 m se na začátku ohybové charakteristiky nachází také lineární úsek. Tento úsek je pozorovatelný do úhlu ohnutí cca $4,5^\circ$ a odpovídajícímu momentu $46\,886\text{ N}\cdot\text{m}$, viz graf 6.3. Tento úsek odpovídá lineární teorii nosníků. Dále opět dochází k zrychlenému ohybu v závislosti na momentu, tzn. nárůst ohybového momentu, začíná zpomalovat vůči nárůstu úhlu ohybu opět důsledkem výskytu plastických deformací a

později důsledkem změny profilu. K výraznému otvírání profilu dochází od úhlu ohnutí přibližně $21,6^\circ$ a odpovídajícímu momentu 76 412 N·m. Od tohoto bodu dochází i k výraznému snižování ohybové tuhosti. Tento bod představuje ztrátu stability tvaru, což způsobuje následné zhroucení konstrukce. Profil totiž není schopen unést větší ohybový moment.

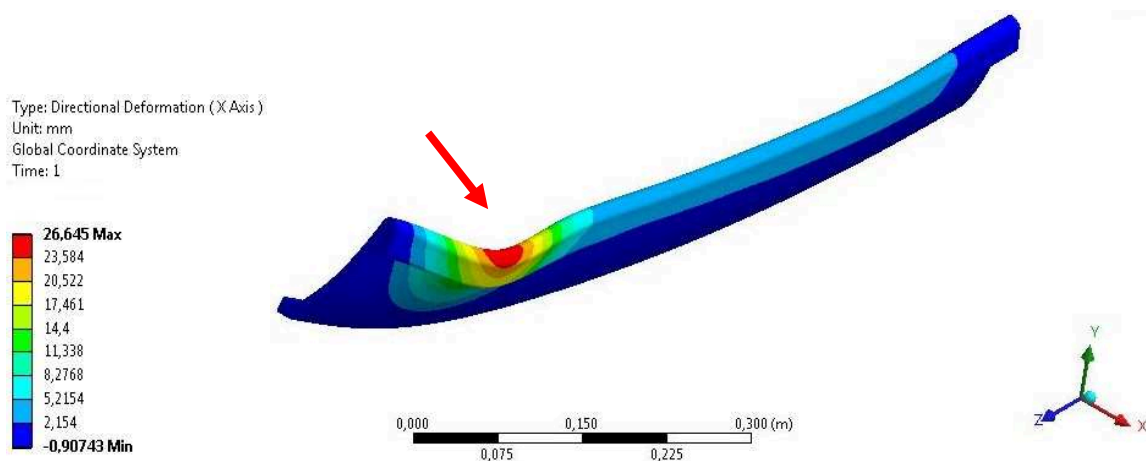


Graf 6.3 - Ohybová charakteristika nosníku o délce 1 m

Na tomto modelu lze vidět, viz Obr. 6.4, že na výztuži se tvoří dvě místa, kde dochází k otvírání profilu. Při větším úhlu ohnutí se však na jednom z těchto míst profil víc otevře, bude mít tedy menší tuhost, a převáží. Tudiž nakonec k výraznému otevření profilu dojde jen na jednom místě, viz Obr. 6.5.

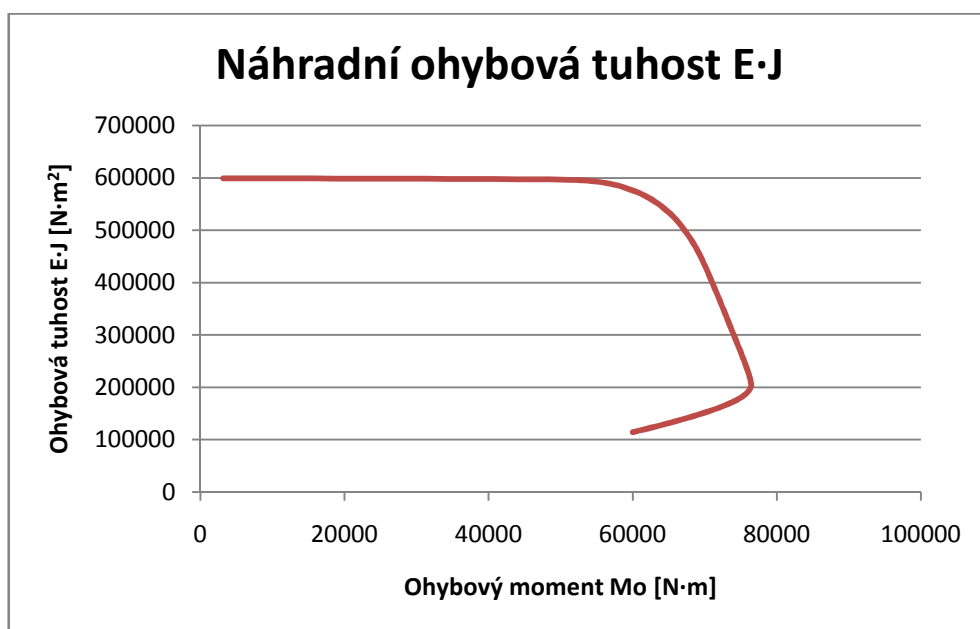


Obr. 6.4 – Otvírání profilu na dvou místech při malém úhlu ohnutí (přibližně 22°) – ohyb nahoru



Obr. 6.5 – Výrazné otvírání profilu při větším úhlu ohnutí (přibližně 30°) – ohyb nahoru

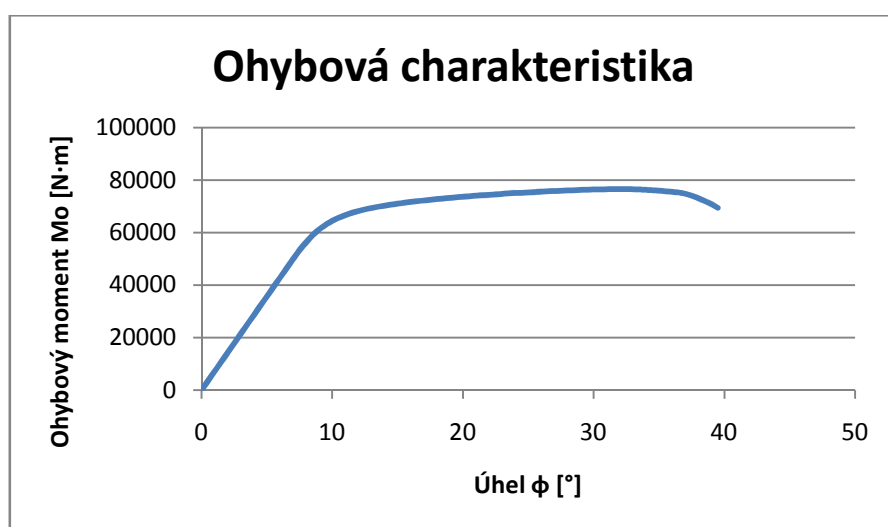
Z průběhu křivky náhradní ohybové tuhosti, viz graf 6.4, lze vypožorovat, že náhradní ohybová tuhost je konstantní při zatěžování do cca 46 886 N·m. Hodnota této náhradní ohybové tuhosti E·J je cca 598 600 N·m². Tento úsek odpovídá lineárnímu úseku ohybové charakteristiky. Dále náhradní ohybová tuhost klesá vlivem výskytu plastických deformací a později i vlivem změny profilu (změna momentu setrvačnosti profilu). Bod s největším ohybovým momentem 76 412 N·m a náhradní ohybovou tuhostí E·J cca 202 689 N·m² představuje bod ztráty stability tvaru.



Graf 6.4 – Náhradní ohybová tuhost E·J pro nosník o délce 1 m

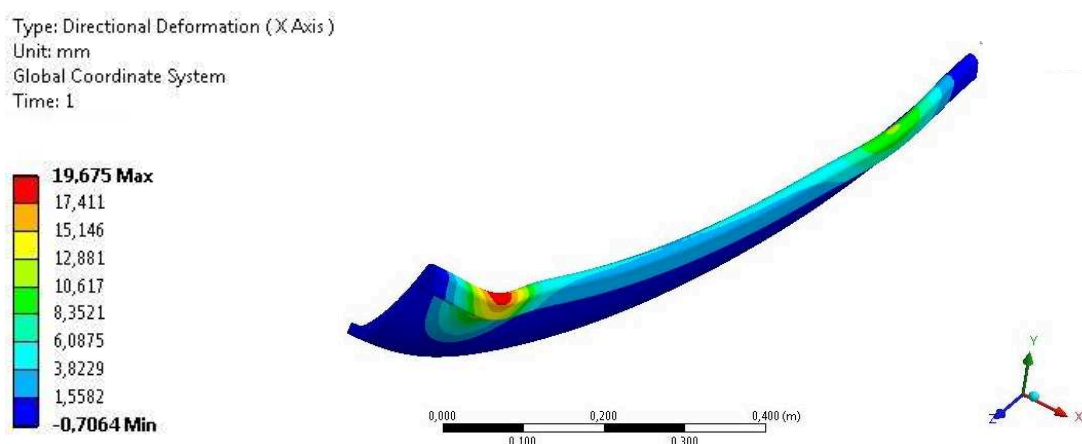
6.1.2 Ohyb nahoru – výztuž o délce 1,5 m

U výztuže o délce 1,5 m se na začátku ohybové charakteristiky nachází také lineární úsek. Tento úsek je pozorovatelný do úhlu ohnutí cca $7,2^\circ$ a odpovídajícímu momentu 51 204 N·m. Dále opět dochází k zrychlenému ohybu v závislosti na momentu, tzn., že nárůst ohybového momentu začíná zpomalovat vůči nárůstu úhlu ohybu. K výraznému otvírání profilu dochází od úhlu ohnutí přibližně 32° a odpovídajícímu momentu 76 508 N·m. Od tohoto bodu dochází i k výraznému snižování ohybové tuhosti. Tento bod představuje ztrátu stability tvaru, což způsobuje následné zhroucení konstrukce.



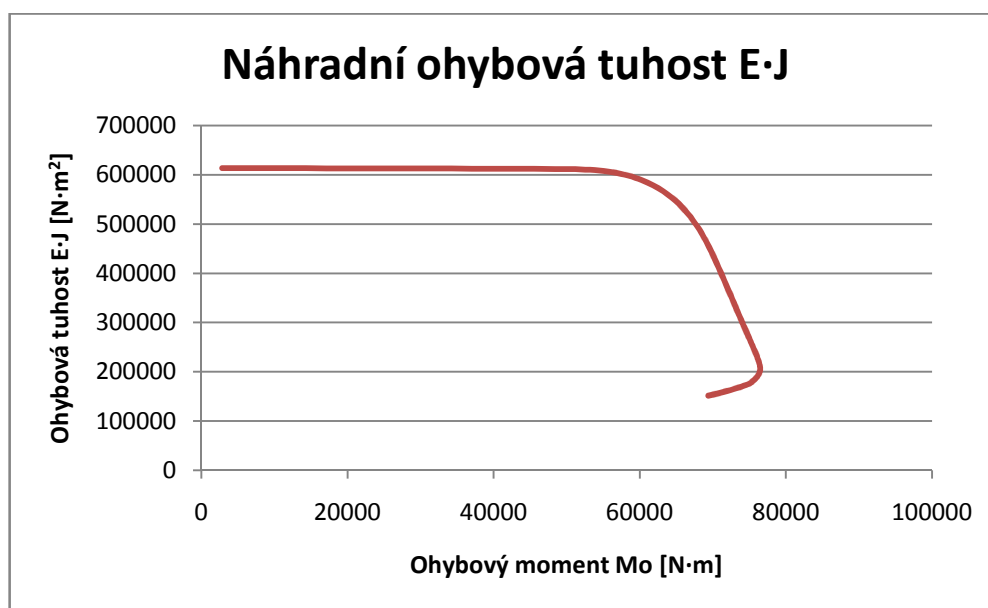
Graf 6.5 – Ohybová charakteristika nosníku o délce 1,5 m

U tohoto modelu stejně jako u modelu o délce 1 m se tvoří dvě místa, kde dochází k otvírání profilu. Při větším úhlu ohnutí také převáží jedno místo nad druhým a nakonec k výraznému otevření profilu dojde jen v jednom místě.



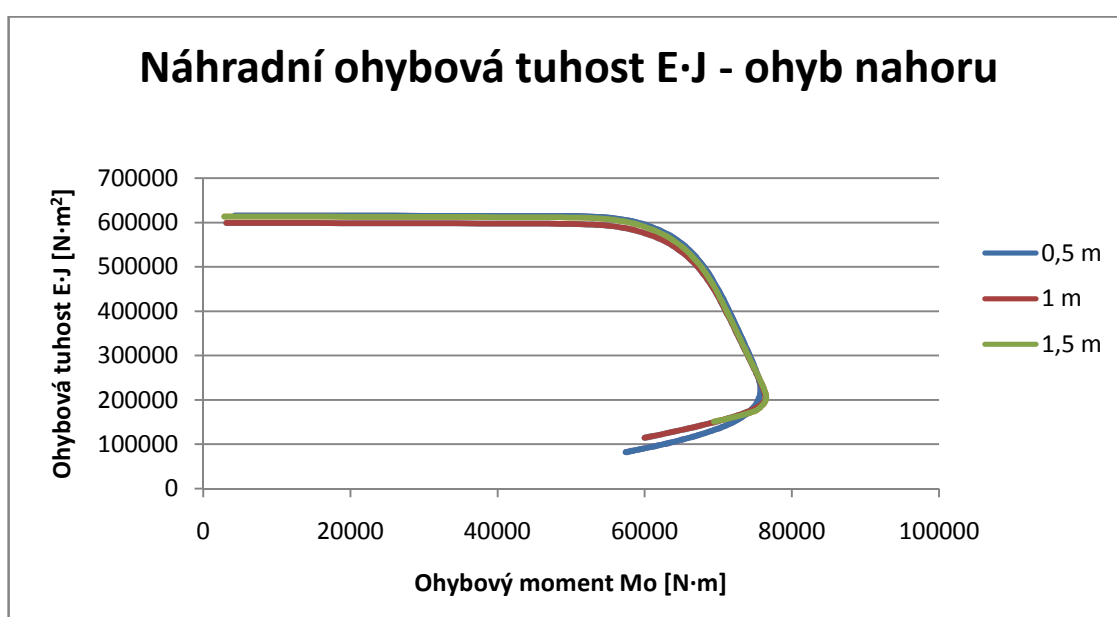
Obr. 6.6 - Výrazné otvírání profilu při větším úhlu ohnutí (přibližně 40°) – ohyb nahoru

Z průběhu křivky náhradní ohybové tuhosti v grafu 6.6 lze vypožorovat, že náhradní ohybová tuhost je konstantní při zatěžování do cca 51 204 N·m. Hodnota této náhradní ohybové tuhosti $E \cdot J$ je cca 613 200 N·m². Dále náhradní ohybová tuhost klesá vlivem výskytu plastických deformací a později i vlivem změny profilu (změna momentu setrvačnosti profilu). Bod s největším ohybovým momentem 76 508 N·m a náhradní ohybovou tuhostí $E \cdot J$ cca 205 480 N·m² představuje bod ztráty stability tvaru.



Graf 6.6 – Náhradní ohybová tuhost $E \cdot J$ pro nosník o délce 1,5 m

6.1.3 Srovnání náhradní ohybové tuhosti $E \cdot J$ všech délek u ohybu nahoru



Graf 6.7 – Náhradní ohybové tuhosti $E \cdot J$ – srovnání – ohyb nahoru

Ze srovnání závislostí ohybových tuhostí $E \cdot J$ na ohybovém momentu M_o , pro 3 různé délky důlních ocelových výztuží profilu TH 29, lze vypočítat z grafu 6.7 přibližnou shodnost průběhů křivky náhradní ohybové tuhosti. V tabulce 6.1 je procentuální srovnání náhradní ohybové tuhosti na lineárním úseku a srovnání maximálního ohybového momentu a náhradní ohybové tuhosti v bodě, kdy dochází ke ztrátě stability tvaru. Procentuální srovnání bylo vypočítáno vždy vůči nejvyšší hodnotě.

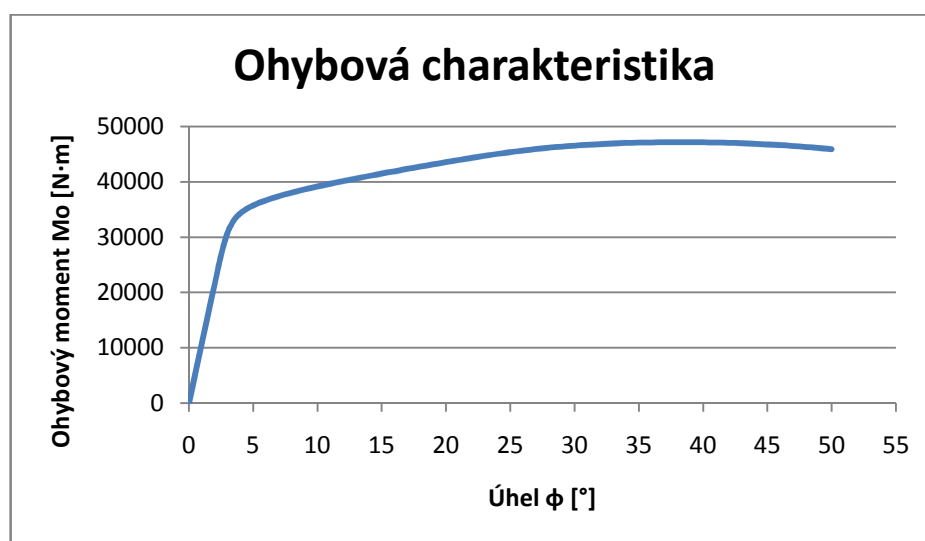
Tabulka 6.1 – Procentuální srovnání lineárního úseku a bodu ztráty stability tvaru

Délka nosníku [m]	Lineární úsek		Bod ztráty stability tvaru			
	$E \cdot J$ [N·m²]	Procentuální rozdíl %	M_o [N·m]	Procentuální rozdíl %	$E \cdot J$ [N·m²]	Procentuální rozdíl %
0,5	614 800	-	75 698	1,06	221 284	-
1	598 600	2,64	76 412	0,12	205 480	7,14
1.5	613 200	0,26	76 508	-	202 689	8,4

Mírně odlišné výsledky odpovídají rozdílným modelům.

6.2 Ohyb dolů

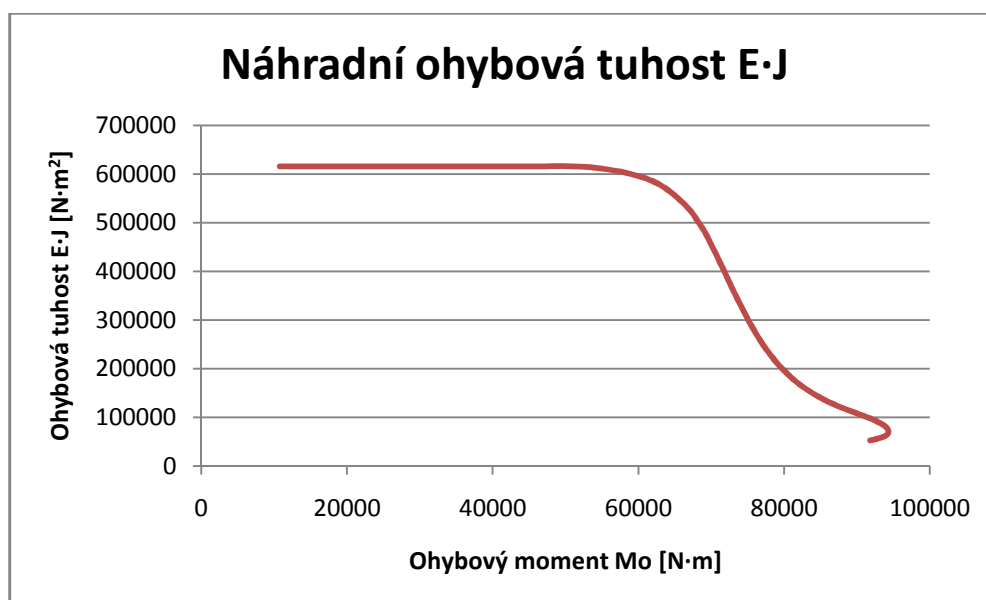
Analýza byla prováděná na jednostranně vetknutém nosníku, na kterém je na volném konci zadán úhel ohnutí směrem dolů. Výsledný ohybový moment byl zjišťován stejně jako u ohybu nahoru z reakce v místě vetknutí. Tento ohybový moment je po celém nosníku konstantní. Výstupem analýzy je úhel ohnutí ϕ a jemu odpovídající ohybový moment M_o . Tato závislost ohybového momentu M_o a úhlu ohnutí ϕ se nazývá ohybová charakteristika.



Graf 6.8 – Ohybová charakteristika nosníku o délce 0,5 m – ohyb dolů

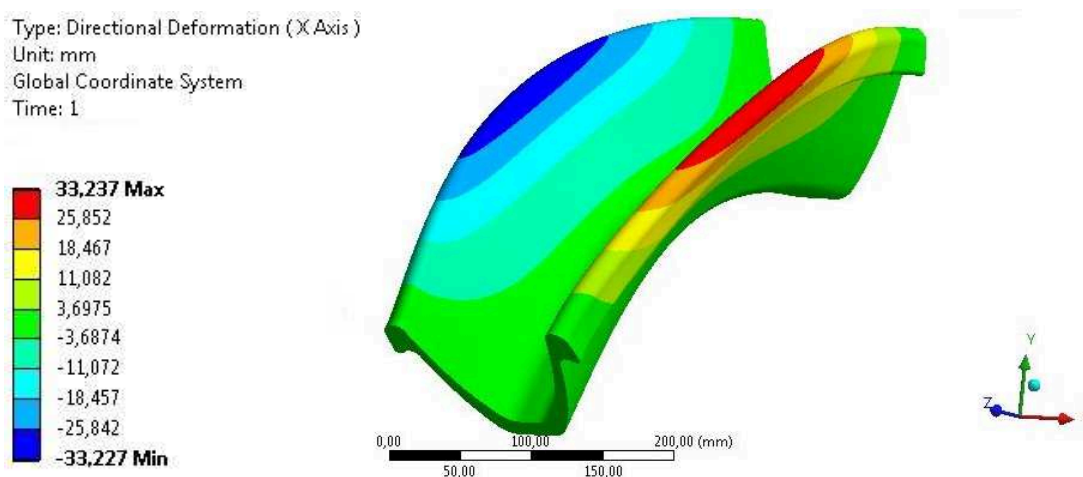
Na začátku ohybové charakteristiky se nachází lineární úsek přibližně do úhlu ohnutí $2,5^\circ$ a odpovídajícímu momentu $53\,540\text{ N}\cdot\text{m}$. Tento úsek odpovídá lineární teorii nosníků. Dále začíná nárůst ohybového momentu zpomalovat vůči nárůstu úhlu ohnutí, tzn., že dochází k zrychlenému ohybu v závislosti na ohybovém momentu důsledkem výskytu plastických deformací a později i změnou profilu. K výraznému otvírání profilu dochází od úhlu ohnutí přibližně $38,5^\circ$ a odpovídajícímu momentu $94\,336\text{ N}\cdot\text{m}$. Tento ohybový moment je větší než u ohybu nahoru. Také úhel je výrazně vyšší než u ohybu nahoru. Od tohoto bodu dochází i k výraznému snižování ohybové tuhosti. Tento bod představuje ztrátu stability tvaru, což způsobuje následné zhroucení konstrukce. Profil totiž není schopen unést větší ohybový moment.

Tento rys nelinearity ohýbaného nosníku se projeví snížením ohybové tuhosti EJ v závislosti na ohybovém momentu. Z výrazu (4.2) lze vypočítat ohybovou tuhost pro odpovídající ohybový moment.

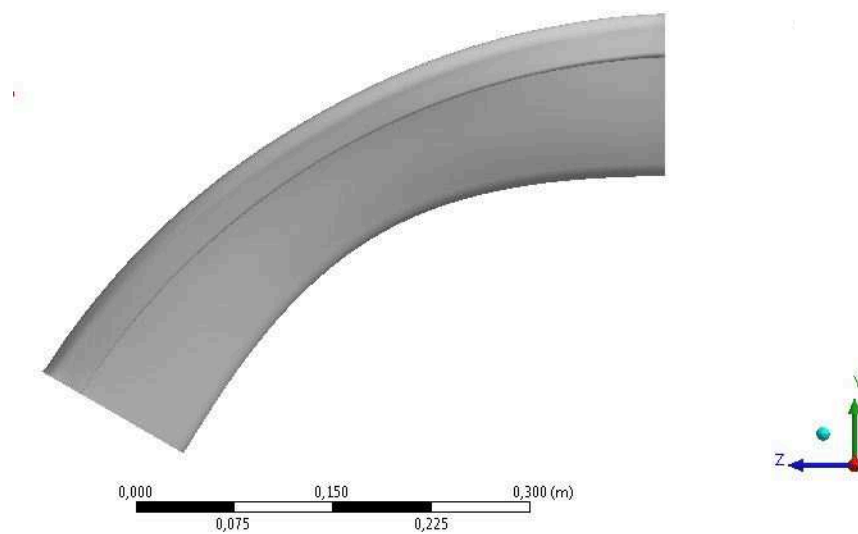


Graf 6.9 – Náhradní ohybová tuhost $E \cdot J$ pro nosník o délce 0,5 m – ohyb dolů

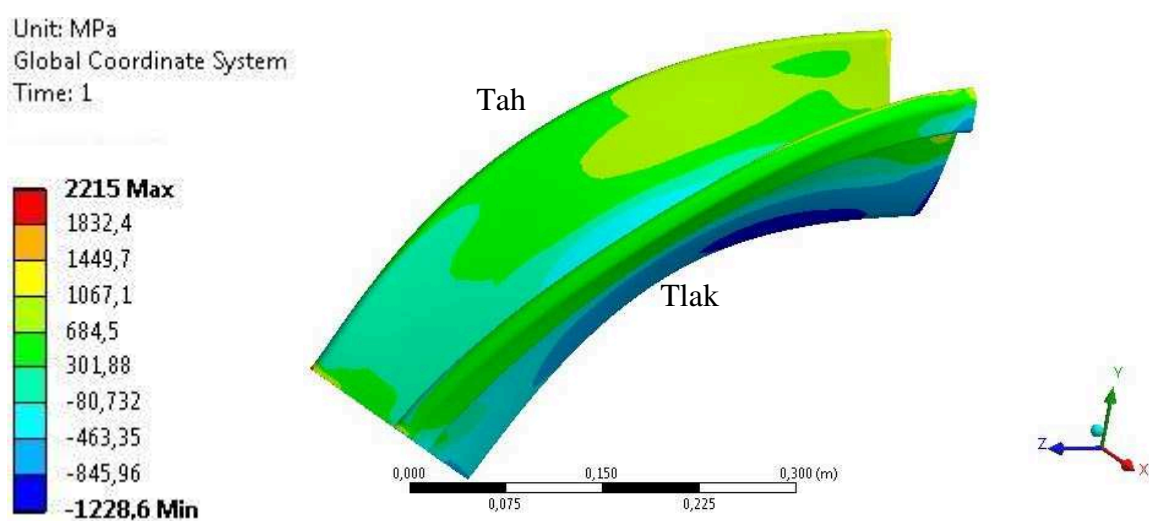
Z průběhu křivky náhradní ohybové tuhosti lze vypožorovat, že náhradní ohybová tuhost je konstantní při zatěžování do přibližně 53 540 N·m. Hodnota této náhradní ohybové tuhosti $E \cdot J$ je cca 614 800 N·m². Tato část představuje lineární úsek, který je na začátku ohybové charakteristiky (lineární teorie nosníků) a je shodná s lineárním úsekem u ohybu nahoru. Dále náhradní ohybová tuhost klesá vlivem výskytu plastických deformací a později i vlivem změny profilu (změna momentu setrvačnosti profilu). Průběh další části ohybové tuhosti pro ohyb dolů se výrazně liší od průběhu ohybové tuhosti pro ohýbaný profil nahoru. Ke ztrátě stability tvaru dochází při působení většího ohybového momentu než u ohýbání nosníku nahoru, a to při momentu 94 336 N·m kde náhradní ohybová tuhost $E \cdot J$ je v tomto bodě cca 70 200 N·m². Také tvar otevření profilu vypadá jinak než při ohýbání nosníku směrem nahoru, viz Obr. 6.7.



Obr. 6.7 – Otevření profilu při větším úhlu ohnutí – posunutí v ose X



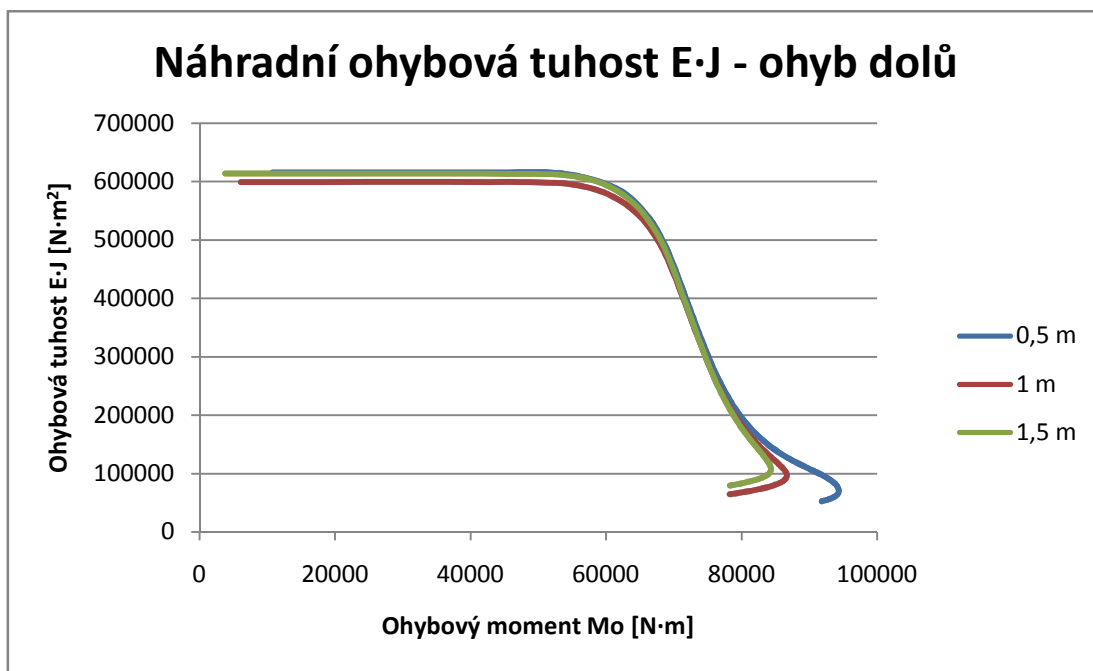
Obr. 6.8 – Ohyb dolů



Obr. 6.9 – Rozložení normálového napětí při větším úhlu ohnutí – ohyb dolů

6.2.1 Srovnání náhradní ohybové tuhosti $E \cdot J$ všech délek u ohybu dolů

Z grafu 6.10 lze vypočítat přibližnou shodnost tvaru průběhů křivky náhradní ohybové tuhosti. Kratší nosník se jeví jako tužší a tím dává větší hodnotu ztráty stability tvaru, neboli snese větší ohybový moment.



Graf 6.10 – Ohybová tuhost $E \cdot J$ – srovnání pro ohyb dolů

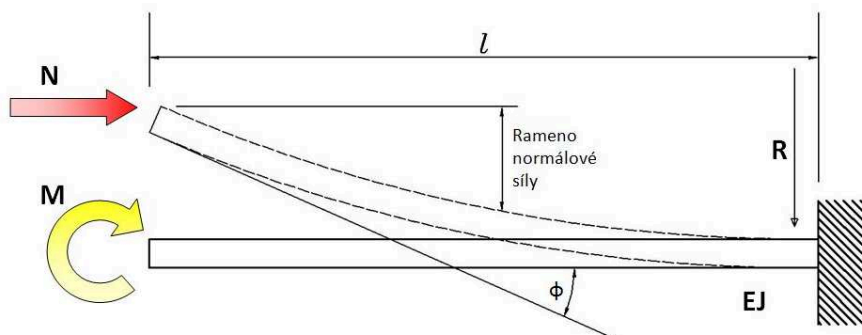
V tabulce 6.2 je procentuální srovnání náhradní ohybové tuhosti na lineárním úseku, srovnání maximálního ohybového momentu a náhradní ohybové tuhosti v bodě, kdy dochází ke ztrátě stability tvaru. Procentuální srovnání bylo vypočítáno vždy vůči nejvyšší hodnotě. Mírně odlišné výsledky odpovídají rozdílným modelům.

Tabulka 6.2 – Procentuální srovnání lineárního úseku a bodu ztráty stability tvaru

Délka nosníku [m]	Lineární úsek		Bod ztráty stability tvaru			
	$E \cdot J$ [N·m ²]	Procentuální rozdíl %	M_o [N·m]	Procentuální rozdíl %	$E \cdot J$ [N·m ²]	Procentuální rozdíl %
0,5	614 800	-	94 336	-	70 215	34,6
1	599 000	2,57	86 658	8,14	96 720	9,94
1.5	613 200	0,26	84 304	10,63	107 390	-

6.3 Vliv normálové síly

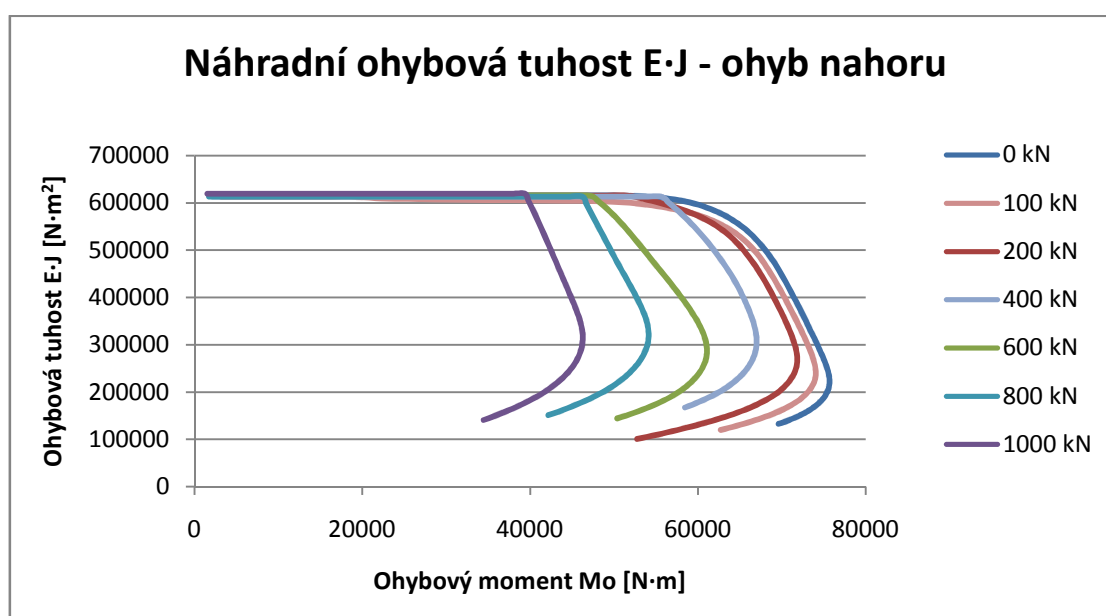
V reálných provozních podmínkách je ohybový moment působící na důlní výztuž, kombinován s normálovou silou, většinou tlakovou.



Obr. 6.10 – Ohyb při kombinaci působení momentu M a normálové síly N

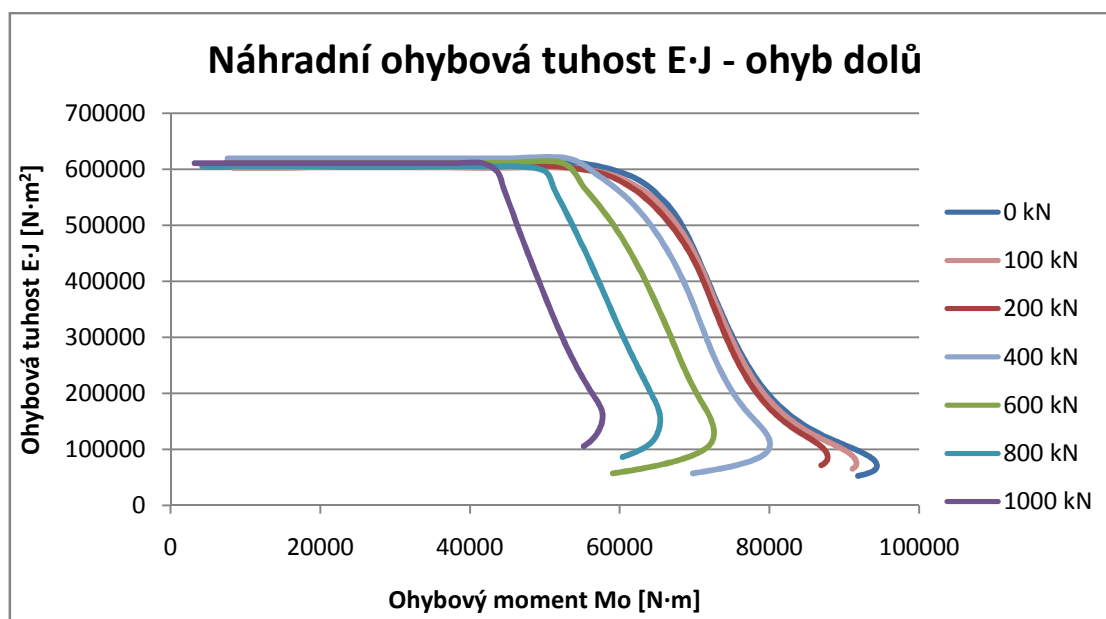
Analýza byla prováděná pro různé hodnoty normálové síly. Velikost normálové síly byla odstupňována od $N = 0$ kN až po $N = 1000$ kN. Do výpočtového modelu byla nejprve aplikována normálová síla N v plné výši bez ohybového momentu a následně byl nosník ohýbán směrem nahoru, poté směrem dolů, postupně narůstajícím úhlem ohybu kolem osy X .

Přítomnost normálové tlakové síly ovlivní tvar ohybové charakteristiky i závislost náhradní ohybové tuhosti na ohybovém momentu.



Graf 6.11 – Náhradní ohybová tuhost $E \cdot J$ – ohyb nahoru při působení normálové síly

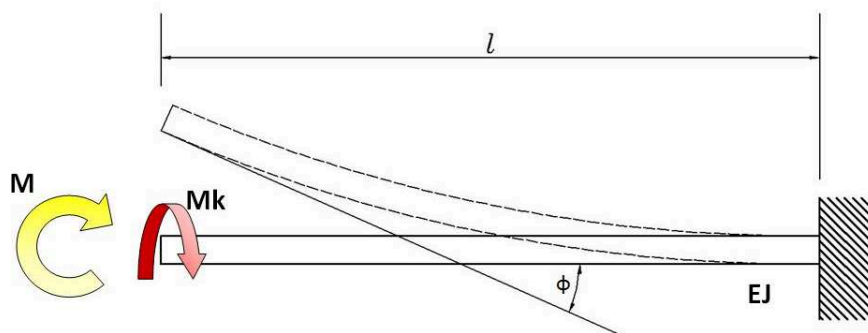
Z grafu 6.11 pro ohyb nahoru je patrné, že se vzrůstající silou dojde ke ztrátě stability tvaru profilu dřív, než u výztuže, na kterou působí pouze ohybový moment, tzn. při působení menšího ohybového momentu. Stejný jev nastává i u ohybu dolů, viz graf 6.12. Na začátku průběhů křivek náhradních ohybových tuhostí, lze pozorovat konstantní část, která představuje lineární úsek (sklon červené přímky), který je na začátku ohybové charakteristiky, viz graf 6.1.



Graf 6.12 – Náhradní ohybová tuhost E·J –ohyb dolů při působení normálové síly

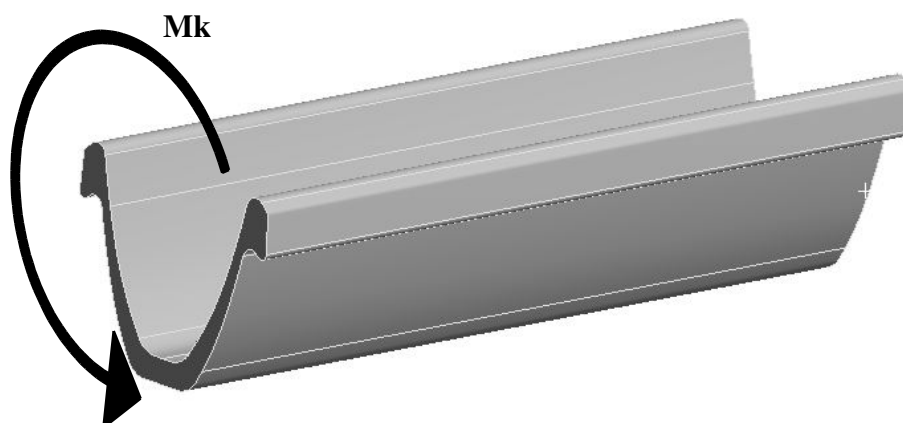
6.4 Vliv krouticího momentu

Dalším případem, ke kterému může dojít je ohýbání profilu důlní výztuže se současným působením krouticího momentu k podélné ose nosníku.



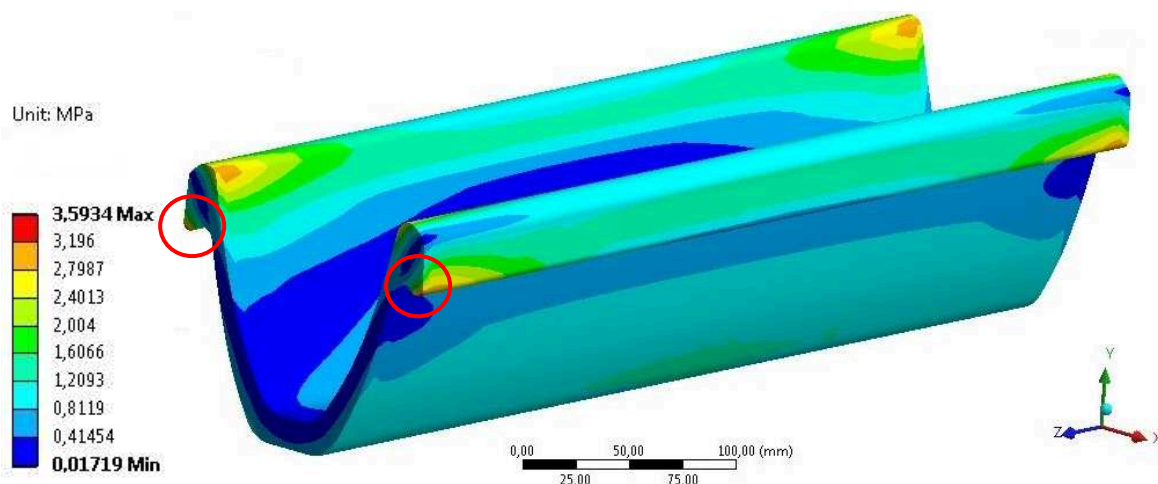
Obr. 6.11 – Ohyb se současným působením krouticího momentu

Do výpočtového modelu bylo zatěžování aplikováno podobně jako u analýzy s vlivem normálové síly. Nejprve byl krouticí moment aplikován v plné výši bez ohybového momentu a následně byl nosník ohýbán směrem nahoru postupně narůstajícím úhlem ohybu kolem osy X. Velikost krouticího momentu byla odstupňována na $M_k = 20 \text{ N}\cdot\text{m}$, $M_k = 50 \text{ N}\cdot\text{m}$, $M_k = 100 \text{ N}\cdot\text{m}$, $M_k = 200 \text{ N}\cdot\text{m}$ a $M_k = 300 \text{ N}\cdot\text{m}$. Výsledný ohybový moment byl poté zjišťován z reakce v uložení (v místě vetknutí).



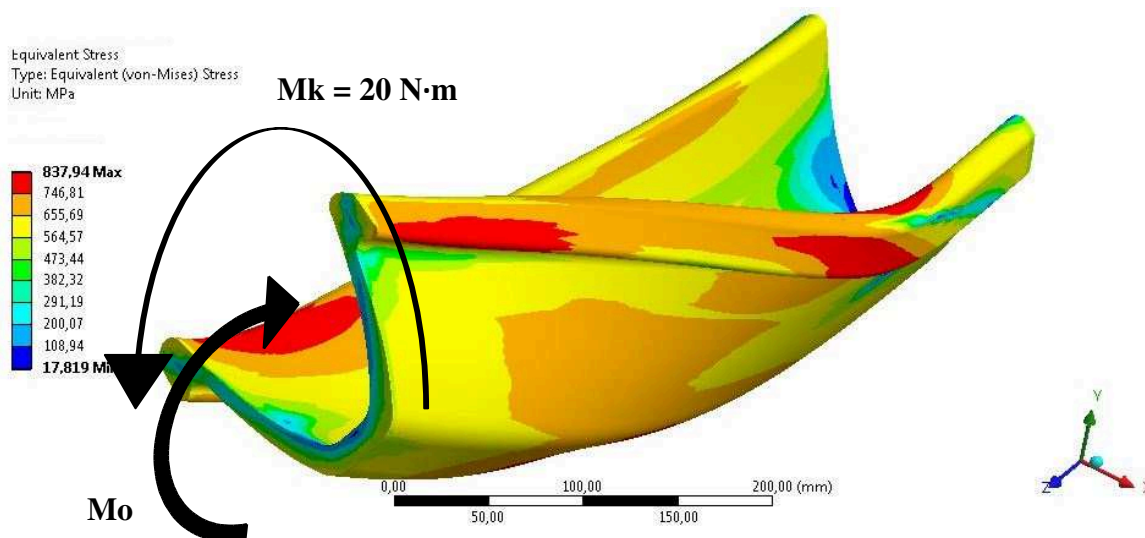
Obr. 6.12 – Působení krouticího momentu na nosník

Krouticí moment $M_k = 20 \text{ N}\cdot\text{m}$ má minimální vliv na nosník. Maximální redukované napětí dle HMH nepřesáhne hodnotu 3,6 MPa. Toto napětí však působí jen v místě působení krouticího momentu, konkrétně v krajních bodech profilu v nepatrných místech a lze jej označit za lokální špičkové napětí. Hodnota tohoto špičkového napětí je silně závislá na kvalitě „končnoprvkové“ sítě. Po celé délce nosníku je napětí výrazně nižší.

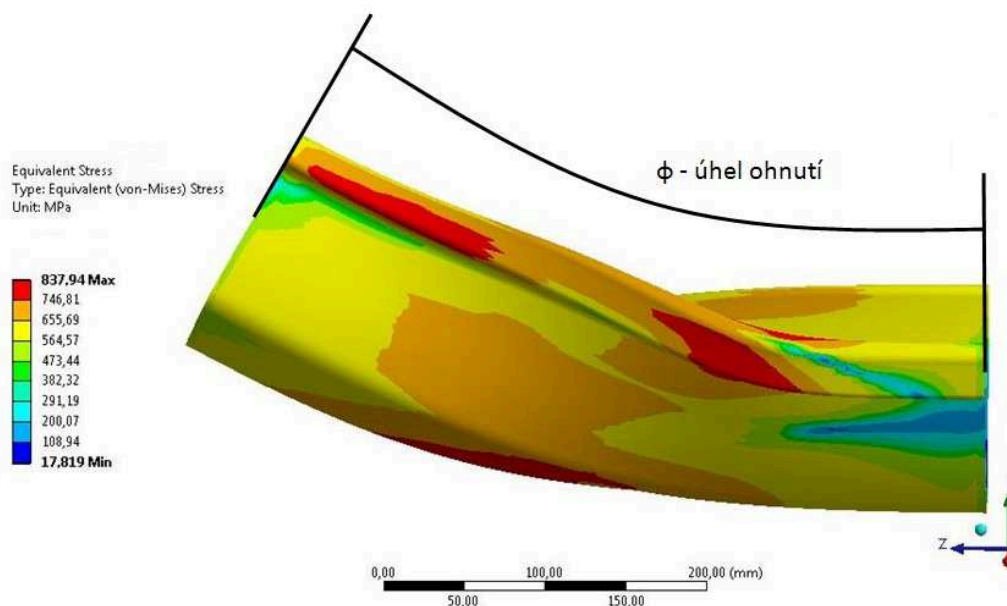


Obr. 6.13 – Redukované napětí dle HMH – čisté kroucení $M_k = 20 \text{ N}\cdot\text{m}$

Samotné kroucení nemá téměř vliv na vznik napětí v nosníku, ale při následném zatěžování ohybem výrazně ovlivní jeho deformaci a dochází k výraznému zkroucení.

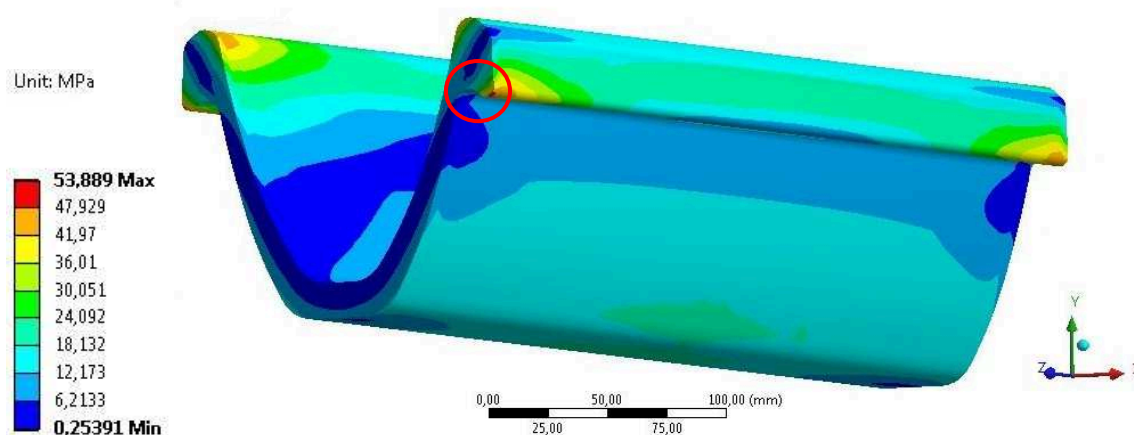


Obr. 6.14 – Ohyb se současným kroucením $M_k = 20 \text{ N}\cdot\text{m}$ – rozložení redukovaného napětí dle HMH

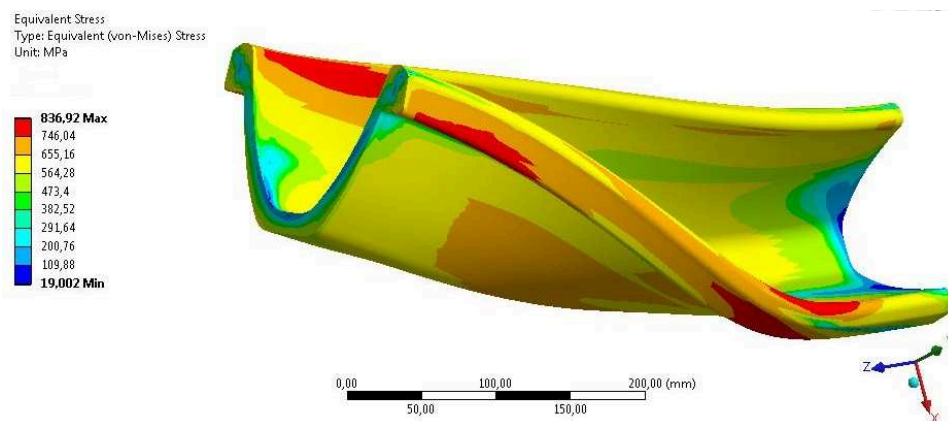


Obr. 6.15 – Úhel ohnutí u ohybu se současným kroucením

Krouticí moment $M_k = 300 \text{ N}\cdot\text{m}$ má větší vliv na nosník z hlediska výskytu redukovaného napětí dle HMH oproti krouticímu momentu $M_k = 20 \text{ N}\cdot\text{m}$. Maximální redukované napětí dle HMH nepřesáhlo hodnotu 53,9 MPa. Toto napětí opět působí jen v místě působení krouticího momentu a lze jej opět označit za lokální špičkové napětí. Po celém nosníku je výrazně nižší.

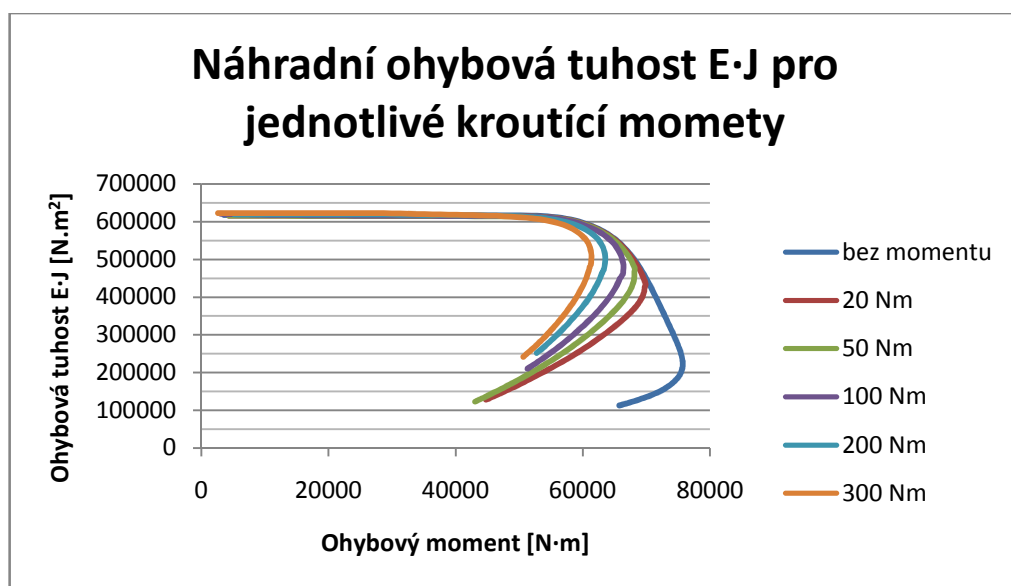


Obr. 6.16 – Redukované napětí dle HMH – čisté kroucení $M_k = 300 \text{ N}\cdot\text{m}$



Obr. 6.17 – Ohyb se současným kroucením $M_k = 300 \text{ N}\cdot\text{m}$ – rozložení redukovaného napětí dle HMH

Výsledky byly zpracovány stejně jako u ohybu. Nejprve byla zpracována ohybová charakteristika $M_o - \phi$, závislost ohybového momentu na úhlu ohnutí profilu a následně vypočtena náhradní ohybová tuhost $E\cdot J$ podle rovnice (4.2), v závislosti na ohybovém momentu M_o . Závislost náhradní ohybové tuhosti $E\cdot J$ byla pro všechny kroucí momenty vynesena pro srovnání do jednoho grafu.



Graf 6.13 - Náhradní ohybová tuhost $E\cdot J$ – ohyb nahoru se současným kroucením

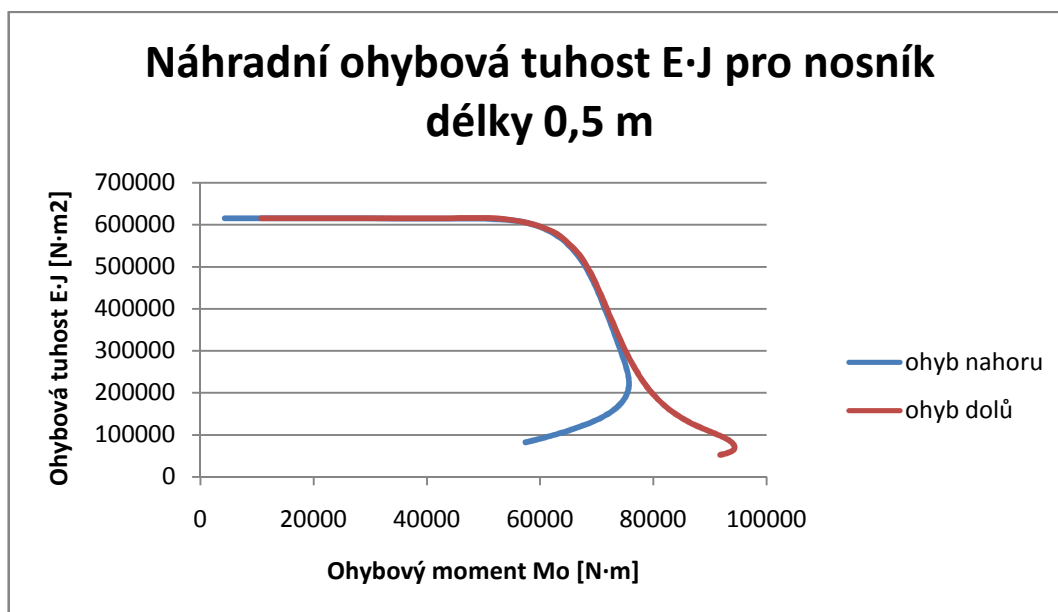
Z grafu 6.13 lze vyčíst výraznou změnu u nelineární části charakteristiky závislosti ohybové tuhosti $E\cdot J$ na ohybovém momentu M_o už při působení malého kroucího momentu $M_k = 20 \text{ N}\cdot\text{m}$. U ohybu se současným kroucením s malým kroucíím momentem $M_k = 20 \text{ N}\cdot\text{m}$ dochází ke ztrátě stability tvaru nosníku při působení ohybového momentu cca $69\,900 \text{ N}\cdot\text{m}$ a ohybové tuhosti cca $435\,100 \text{ N}\cdot\text{m}^2$. Čím vyšší je hodnota kroucího momentu působící na nosník, tím se jeho náhradní ohybová tuhost výrazně zmenšuje.

7 Závěr

Práce se především zabývala vyšetřováním nelineární ohybové charakteristiky a z ní odvozenou závislostí ohybové tuhosti na ohybovém momentu ohýbané důlní ocelové výztuže. Na začátku práce je popsáno užití důlní ocelové výztuže v současnosti. Následně je charakterizována lineární teorie ztráty stability přímého prutu. V další části práce se popisuje ohybová charakteristika a náhradní ohybová tuhost pro dokonale vetknutý nosník, který je ohýbaný ohybovým momentem M_o , dále ohybovým momentem M_o kombinovaným normálovou (tlakovou) silou N , kde je analyticky vyřešena i průhybová křivka nosníku a nakonec nosník ohýbaný ohybovým momentem M_o kombinovaný krouticím momentem M_k . Pro stanovení ohybové charakteristiky a náhradní ohybové tuhosti u ohýbané výztuže bylo využito metody konečných prvků. Byly vymodelovány trojrozměrné modely v prostředí software Ansys Workbench použitím tzv. „konečnoprvkových“, entit. U těchto modelů byl požit 20 uzlový 3D prvek SOLID 186.

Důlní výztuž délky 0,5 m byla nejprve ohýbaná čistě jen ohybovým momentem směrem nahoru a následně směrem dolů. Výstupem analýzy byl úhel ohnutí ϕ a jemu odpovídající ohybový moment M_o , tzv. ohybová charakteristika. Na začátku ohybové charakteristiky se nachází lineární úsek, který odpovídá lineární teorii nosníků. Dále dochází k zrychlenému ohybu v závislosti na momentu důsledkem vzniku plastických deformací a později i změnou profilu. U ohybu nahoru k výraznému otvírání profilu dochází od úhlu ohnutí přibližně $9,8^\circ$ a jemu odpovídajícímu momentu $75\,698\text{ N}\cdot\text{m}$. Tvar otvírání profilu, viz Obr. 6.1. Od tohoto bodu dochází i k výraznému snižování ohybové tuhosti. Tento bod představuje ztrátu stability tvaru, což způsobuje následné zhroucení konstrukce. Ohybová charakteristika se pro ohyb dolů od charakteristiky pro ohyb nahoru liší. K výraznému otvírání profilu dochází při větším úhlu ohnutí přibližně $38,5^\circ$ a jemu odpovídajícímu momentu $94\,336\text{ N}\cdot\text{m}$. Ohybový moment je podstatně větší, než u ohybu nahoru. Tento bod opět představuje ztrátu stability tvaru. Také tvar otvírání profilu je jiný, viz Obr. 6.7. Tento rys nelinearity ohýbaného nosníku se projeví snížením ohybové tuhosti $E\cdot J$ v závislosti na ohybovém momentu M_o . Z průběhu křivek náhradní ohybové tuhosti z grafu 7.1 lze vypožorovat, že na začátku se nachází úsek s konstantní hodnotou ohybové tuhosti $E\cdot J$ cca $614\,800\text{ N}\cdot\text{m}^2$, který je pro ohyb nahoru a dolů přibližně shodný. Tato část představuje lineární úsek, který je na začátku ohybové charakteristiky, viz graf 6.1. Dále náhradní ohybová tuhost klesá vlivem výskytu plastických deformací a později i vlivem

změny profilu (změna momentu setrvačnosti profilu). Průběh další části ohybové tuhosti pro ohyb dolů se výrazně liší od průběhu ohybové tuhosti pro ohýbaný profil nahoru. U ohybu nahoru dochází ke ztrátě stability tvaru při působení menšího ohybového momentu než u ohýbání nosníku dolů, a také její ohybová tuhost $E \cdot J$ je výrazně vyšší.



Graf 7.1 – Náhradní ohybová tuhost $E \cdot J$ pro nosník délky 0,5 m

Pro srovnání náhradní ohybové tuhosti u nosníku zatíženého čistým ohybem byl proveden výpočet i na dalších dvou vymodelovaných výztuží o délce 1 m a 1,5 m. Srovnání závislosti ohybové tuhosti $E \cdot J$ na ohybovém momentu M_o všech délek pro ohyb nahoru je uvedeno v kapitole 6.1.3. Z porovnání náhradních ohybových tuhostí, pro 3 různé délky důlních ocelových výztuží profilu TH 29, lze vypočítat z grafu 6.7 přibližnou totožnost průběhů křivky náhradní ohybové tuhosti. Z porovnání náhradních ohybových tuhostí pro ohyb dolů uvedené v kapitole 6.2.1., v grafu 6.10, lze také vypočítat shodnost tvaru průběhů křivky jednotlivých délek. Jen kratší nosník se jeví jako tužší, a tím dává větší hodnotu ztráty stability tvaru, neboli snese větší ohybový moment. Mírně odlišné výsledky, u obou porovnání náhradních ohybových tuhostí, odpovídají rozdílným modelům.

Dalším řešeným případem byl nosník o délce 0,5 m ohýbán směrem nahoru a dolů, na který zároveň působila normálová síla (tlaková). Přítomnost normálové tlakové síly výrazně ovlivnil tvar ohybové charakteristiky i závislost náhradní ohybové tuhosti $E \cdot J$ na ohybovém momentu. Analýza byla prováděná pro různé velikosti normálové síly, a to pro

síly $N = 100, 200, 400, 600, 800$ a 1000 kN. Postupně vzrůstající silou dochází ke ztrátě stability tvaru profilu dřív, než u výztuže, na kterou působí pouze ohybový moment, tzn., že ke ztrátě stability tvar dojde při působení menšího ohybového momentu, jak u ohybu nahoru viz graf 6.11, tak i u ohybu dolů viz graf 6.12.

Naposled byl řešený případ, ke kterému také může dojít při ohýbání důlní ocelové výztuže, a to konkrétně ohyb profilu délky $0,5$ m směrem nahoru se současným působením krouticího momentu. Velikost krouticího momentu byla odstupňována na $M_k = 20, 50, 100, 200$ a 300 N·m. Samotné kroucení nemá téměř vliv na vznik napětí (redukované napětí dle HMM) v nosníku, ale při následném zatěžování ohybem výrazně ovlivní jeho deformaci a dochází k výraznému zkroucení. Z grafu 6.13 lze vyčíst, čím vyšší je hodnota krouticího momentu působící na nosník, tím se jeho ohybová tuhost $E \cdot J$ výrazně zmenšuje.

8 Seznam použité literatury

- [1] Juliš K., Tepřík O., Slavík A.: *Statika*. SNTL/Alfa, Praha 1987.
- [2] Chobot K., Benda J., Hájek V., Novotná H.: *Statika stavebních konstrukcí II*. SNTL/Alfa, Praha 1983
- [3] Hoschl C.: *Pružnost a pevnost ve strojnictví*. SNTL/Alfa, Praha 1971.
- [4] Kolář V., Němec I., Kanický V.: *FEM Principy a praxe metody konečných prvků*. Computer Press, 1997.
- [5] Kolář V., Kratochvíl J., Leitner F., Ženíšek A.: *Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků*. SNTL, Praha 1979.
- [6] Crisfield M. A.: *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley & Sons Ltd, Baffins Lane, Chichester, 1997.
- [7] Halama R., Adámková L., Fojtík F., Frydryšek K., Šofer M., Rojíček J., Fusek M.: *Pružnost a pevnost*. 2011 [Online].
URL:<http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/pruznost_pevnost_obraz.pdf>
[cit. 2013-04-30].
- [8] Lenert J.: *Pružnost a pevnost II*. 2. vydání. VŠB-TU Ostrava, 2009. 174 s. ISBN 978-80-248-1959-4
- [9] Petr Horyl : MKP jako nástroj řešení problematiky ztráty stability tvaru. [Online].
URL:<[http://www.337.vsb.cz/materialy/Stabilita_tvaru_resena_metodou_konecnyc_h_prvku .pdf](http://www.337.vsb.cz/materialy/Stabilita_tvaru_resena_metodou_konecnyc_h_prvku.pdf) > [cit. 2013-04-30].
- [10] *České vysoké učení technické v Praze, fakulta stavební*
URL: <departments.fsv.cvut.cz/k135/data/wp-upload/2008/04/dulni_vyztuze_mittal_steel.pdf> [cit. 2013-04-19].

- [11] *Hofmannovy cesty*
URL: <http://www.hofmann.estranky.cz/fotoalbum/banske-prace/pruzkumna-stola/img_4756.html> [cit. 2013-04-19].
- [12] *Wikipedia*
URL: <<http://cs.wikipedia.org/wiki/Hajcman>> [cit. 2013-04-19].
- [13] *Ústav geoniky AV ČR, v. v. i.*
URL: <<http://www.ugn.cas.cz/events/2008/colloq/06.J.pdf>> [cit. 2013-04-20].
- [14] *KO-KA s.r.o., projekční a inženýrská kancelář, Publikované články*
URL: <http://www.ko-ka.cz/cz/Publikace/2011_03_Posouzeni_vyztuze.pdf> [cit. 2013-04-20].
- [15] Podešva J. Metodika výpočtu náhradní tuhosti nosníku. In *Sborník konference Modelování v mechanice*, FAST VŠB TU Ostrava, 1. - 2. únor 2006, ISBN 80-248-1035-2
- [16] Podešva J., Makropulos A. Nelineární ohyb důlní výztuže s vlivem kroucení. *Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava. Řada stavební. 2011*, roč. 11, č. 1, s. 289-298 : il. Ostrava 2011. ISSN 1213-1962
- [17] Podešva J. Náhradní ohybová tuhost nosníku. In *Sborník ANSYS konference 2010 pro Českou republiku a Slovensko*. Frymburk 6. - 8. října 2010, ISBN 978-80-254-8388-6
- [18] Ansys Inc. Documentation for ANSYS Release 13.0. SAS IP, Inc., 2011
- [19] *Univerzita Karlova v Praze, matematicko-fyzikální fakulta*
URL:<http://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz_fyziky_pro_DS/display.php/kontinuum/2_6#kap_2_6_1>